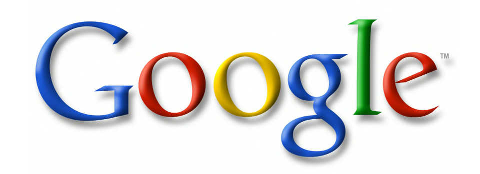
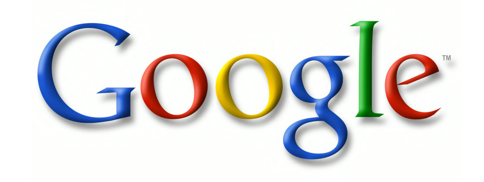




This binder contains 6 pamphlets:

N.Preobrajensky: THE PRINCIPLE OF NODAL POINTS
1888

N.Senigov: THE NEW LAW OF INCREMENTS FOR
PRIME NUMBERS. 1893

E.S.Davidov: THE LEAST GROUPS OF NUMBERS FOR
DEVELOPMENT OF NATURAL SERIES.
1903

A.Repman: MATERIALS FOR THE THEORY OF NUMBERS
1903

D.Selivanov: INFINITE DECIMAL FRACTIONS AND
IRRATIONAL NUMBERS, 1907

R.Dedekind: CONTINUOUS AND IRRATIONAL NUMBERS.
1923.

Russian

ПРИНЦИПЪ
УЗЛОВЫХЪ ТОЧЕКЪ.

СООБЩЕНІЕ

И. Преображенскаго

(сдѣланное въ 79 засѣданіи секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ).





КАЗАНЬ.
Типографія Императорскаго Университета.
1883.



ПРИНЦИПЪ

УЗЛОВЫХЪ ТОЧЕКЪ.

СООБЩЕНІЕ

П. Преображенскаго

(сдѣланное въ 79 засѣданіи секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ).





КАЗАНЬ.
Типографія Императорскаго Университета.
1888.



Печатано по опредѣленію Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Президентъ *А. Штукенбергъ.*

ПРИНЦИПЪ УЗЛОВЫХЪ ТОЧЕКЪ.

Сообщеніе

П. Преображенскаго

(сдѣланное въ 79 засѣданіи секціи физико-математическихъ наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ).

§ 1. Какъ въ Анализѣ, такъ и въ Теоріи чиселъ встрѣчается необходимость въ знаніи величины различныхъ выраженій, зависящихъ отъ ряда простыхъ чиселъ. Таковы, напр., выраженіе суммы простыхъ чиселъ, не превосходящихъ извѣстнаго предѣла, выраженіе числа ихъ, суммы ихъ логариѳмовъ и т. д. Сложность извѣстныхъ точныхъ формулъ заставила искать приближеннаго рѣшенія вопроса. Но здѣсь встрѣчаются различныя затрудненія. Изъ нихъ особенно важны слѣдующія два, которыя мы разъяснимъ на примѣрѣ.

Возьмемъ формулу [1])

$$\sum_{2}^{n} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} = lg\, lg\, n + Const.$$

Чтобы пользоваться ею, необходимо опредѣлить *Const*, а для этого нужно вычислить сумму $\Sigma \frac{1}{p}$ до нѣкотораго, более или менѣе значительнаго n.

---

[1]) Теорія сравненій Чебышева.

Спрашивается, на какомъ n нужно остановиться, чтобы формула была возможно болѣе точна.

Наиболѣе правильный путь состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить *Const* при $n=\infty$ (или иногда при $n=0$, при $n=1$ и т. д.). Если рядъ расходящійся, какъ напр. въ данномъ случаѣ, то потребуются искусственные пріемы для опредѣленія предѣла разности между первой частью формулы и перемѣнной частью второй.

Другой путь состоитъ въ томъ, что берутъ нѣсколько различныхъ значеній n и находятъ среднюю величину *Const*. Формула очевидно будетъ включать погрѣшность, заключающуюся въ значеніи *Const*.

Вторая причина погрѣшностей состоитъ въ неизвѣстности предѣла, до котораго нужно брать выраженіе, заключающееся въ формулѣ. Нужно ли брать его при n или при какой нибудь иной соотвѣтствующей n величинѣ.

Между тѣмъ отъ измѣненія предѣла n можетъ получиться ошибка, по своимъ размѣрамъ доходящая до величины послѣдняго слагаемаго.

Для устраненія этихъ двухъ наиболѣе важныхъ причинъ погрѣшностей приближенныхъ формулъ Теоріи чиселъ необходимъ новый принципъ.

Мы предлагаемъ этотъ принципъ подъ именемъ *принципа узловыхъ точекъ*.

Онъ показываетъ, напр., что при опредѣленіи $\Sigma\frac{1}{p}$ до $p=191$ и до $p=199$, несмотря на то, что и 191 и 199 суть числа простыя и притомъ довольно близкія между собою, въ первомъ случаѣ нужно взять предѣломъ само число 191, а во второмъ 207,9. Тѣже самые предѣлы нужно брать и въ другихъ формулахъ, такъ что для каждаго простого числа существуетъ единственный, строго опредѣленный предѣлъ,

до котораго нужно брать сумму какихъ бы то ни было функцій, зависящихъ отъ ряда простыхъ чиселъ.

Такъ, напр., при опредѣленіи $\Sigma\, lg\, p$ до $p=191$ и до $p=199$, если предѣлами возьмемъ 191 и 207,9, то, какъ увидимъ ниже, получимъ по формулѣ результатъ точный до десятитысячной доли единицы. Между тѣмъ, если и во второмъ случаѣ въ формулѣ предѣломъ возьмемъ $n=p$, то получимъ весьма большую ошибку въ 9 единицъ.

Прежде, чѣмъ переидти къ изложенію принципа, доводящаго погрѣшности до самыхъ ничтожныхъ размѣровъ, намъ нужно сказать нѣсколько словъ о плотности простыхъ чиселъ.

§ 2. *Выраженія плотности простыхъ чиселъ.*

Число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ x, мы будемъ обозначать черезъ $\Theta(x)$.

Для выраженія этой функціи Риманъ далъ слѣдующій рядъ

$$q_1\, li(x)+\frac{1}{2}\, q_2\, li(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\, q_3\, li(x^{\frac{1}{3}})+\ldots$$

гдѣ

$$li\, x=\int_0^x \frac{dx}{lg\, x}$$

и гдѣ q_n равно 1 при $n=1$ или n, равномъ числу, состоящему изъ четнаго числа первонач. различныхъ множителей, q_n равно -1, при n, состоящемъ изъ нечетнаго числа первоначальныхъ множителей и $q_n=0$ при n, дѣлящемся на квадратъ. Условившись обозначать величину написаннаго выше ряда черезъ $R(x)$, будемъ имѣть

$$(1)\quad R(x)=li(x)-\frac{1}{2}\, li\,(x^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{3}\, li\,(x^{\frac{1}{3}})-\frac{1}{5}\, li\, x^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{6}\, li\, x^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{7}\, li\, x^{\frac{1}{7}}+\ldots$$

Производную отъ этого ряда мы будемъ называть плотностью простыхъ чиселъ въ точкѣ x и обозначать черезъ $\Delta(x)$.

Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$(2)\quad \Delta(x) = \frac{1}{x\, lg\, x}\left(x - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{7}x^{\frac{1}{7}} + \frac{1}{10}x^{\frac{1}{10}} \quad \ldots\right)$$

При вычисленіи какъ $R(x)$, такъ и $\Delta(x)$ нужно обратить вниманіе на слѣдующее.

Первый членъ значительно преобладаетъ надъ остальными, такъ что одинъ можетъ составлять первую степень приближенія.

Для полученія второй степени приближенія можно къ первому члену прибавить сумму второго и третьяго.

Затѣмъ идутъ члены четвертый, пятый и шестой. Сумма ихъ весьма мала не только въ сравненіи съ первымъ, но даже и съ суммой второго и третьяго.

Сумма всѣхъ остальныхъ членовъ, начиная съ седьмого, имѣющаго коэффиціентомъ q_{10}, весьма мала даже сравнительно съ суммой 4-го, 5-го и 6-го членовъ. Это обстоятельство весьма важно и мы его разъяснимъ подробнѣе.

Седьмой и восьмой члены

$$\frac{1}{10}\, li\, x^{\frac{1}{10}} \text{ и} - \frac{1}{11}\, li\, x^{\frac{1}{11}} \text{ или } \frac{1}{10}\, x^{\frac{1}{10}} \text{ и} - \frac{1}{11}\, x^{\frac{1}{11}}$$

весьма близки по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку. Слѣд. если каждый изъ нихъ принимать за весьма малую величину перваго порядка, то разность будетъ величиной второго порядка.

Слѣдующіе два члена, имѣющіе коэффиціентами q_{13} и q_{14}, также весьма близки по величинѣ, противоположны по знаку и притомъ даютъ разность, противоположную предъ-

идущей. Вслѣдствіе того вся совокупность членовъ, соотвѣтствующихъ q_{10}, q_{11}, q_{13} и q_{14} можетъ быть отброшена по ея сравнительно ничтожной величинѣ.

Совершенно въ томъ же положеніи находятся слѣдующіе четыре члена, соотвѣтствующіе q_{15}, q_{17}, q_{19} и q_{21}.

Для примѣра возьмемъ $\Delta(x)$ при $x=e^{6,6}$.

Внутри скобокъ первый членъ равенъ 735,1.

сумма 2-го и 3-го равна —16,56

сумма 4-го, 5-го и 6-го „ —0,614

сумма 7-го, 8-го, 9-го и 10-го „ —0,011

Послѣ раздѣленія на $x\,lg\,x$ послѣдняя часть даетъ въ частномъ такую величину, которой можно пренебречь.

На основаніи высказаннаго соображенія мы будемъ въ выраженіяхъ $R(x)$ и $\Delta(x)$ ограничиваться шестью, а иногда даже тремя первыми членами.

§ 3. При значительной величинѣ x въ написанныхъ выше рядахъ для $R(x)$ и $\Delta(x)$ члены весьма быстро уменьшаются.

Нельзя того же сказать про случай, когда x не велико. Какъ по этой, такъ и по другимъ причинамъ важно знать еще другое разложеніе этихъ функцій.

Изъ ряда, выражающаго $li(x)$,

$$li\,x = lg\,lg\,x + C + \frac{lg x}{1!1} + \frac{lg^2 x}{2!2} + \frac{lg^3 x}{3!3} + \dots$$

(гдѣ C есть Эйлерово постоянное)

легко выводится слѣдующее выраженіе $R\,x)$

$$(3) \qquad R(x) = 1 + \frac{lg x}{1!1\,s_2} + \frac{lg^2 x}{2!2\,s_3} + \frac{lg^3 x}{3!3\,s_4} + \dots$$

$$\text{гдѣ } S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots.$$

Взявъ производную отъ этого ряда, будемъ имѣть

$$(4) \qquad \Delta(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1!s_2} + \frac{lg x}{2!s_3} + \frac{lg^2 x}{3!s_4} + \frac{lg^3 x}{4!s_5} + \dots\right)$$

Какъ тотъ, такъ и другой ряды суть сходящіеся при всякомъ x, отличномъ отъ нуля.

§ 4. *Узловыя точки.* Представимъ себѣ кривую

$$y = R(x)$$

и линіи, проведенныя параллельно оси x на разстояніяхъ $y=1$, $y=2$ и т. д.

Точки пересѣченія ихъ съ кривой $y=R(x)$ будемъ называть узловыми точками, а абсциссы ихъ узловыми числами.

Если функцію, обратную функціи $R(x)$, обозначимъ черезъ $u(x)$, то узловыя числа будутъ $u(1)$, $u(2)$ и т. д. вообще u отъ ряда натуральныхъ чиселъ.

Принципъ, о которомъ мы говорили, состоитъ въ слѣдующемъ.

$$\sum_{p_{t'+1}}^{p_t} f(p) = \int_{u(t')}^{u(t)} f(x).\ \Delta(x).\ dx \tag{5}$$

т. е. *если мы хотимъ найти $\Sigma f(p)$ для ряда простыхъ чиселъ, изъ которыхъ послѣднее занимаетъ мѣсто t, а первому предшествуетъ t' простыхъ чиселъ, то мы должны $f(x)$ умножить на Δx и взять интегралъ между предѣлами $u(t')$* и $u(t)$.

§ 5. Покажемъ, какимъ образомъ опредѣляются узловыя числа.

Для значеній $R(x)$ составлены таблицы. Таковы таблицы Glaisher'a, Gram'a и другихъ. Пусть, напр., намъ нужно опредѣлить $u(79)$, а изъ таблицъ мы видимъ, что при $x=e^6=403{,}4288$ и $R(x)=79{,}0048$.

По формулѣ (2) опредѣлимъ Δe^6. Найдемъ

$$\Delta e^6 = 0{,}161273$$

Затѣмъ опредѣлимъ ту величину h, которую нужно отнять отъ e^6, чтобы $R(e^6)$ убавилось на $0{,}0048$.

Такъ какъ Δx есть производная отъ $R(x)$ то, по малости приращенія h, можно написать

$$R(e^6-h)=R(e^6)-h.\ \Delta(e^6)$$

откуда видимъ, что $h.\ 0{,}161273=0{,}0048$.

Получимъ $h=0{,}0298$ и слѣд

$$e^6-h=403{,}399$$

Итакъ $u(79)=403{,}40$

Въ прибавленіи помѣщается составленная нами таблица узловыхъ чиселъ, не превышающихъ тысячи, и десятичныхъ логариѳмовъ этихъ чиселъ.

При вычисленіи приводимыхъ нами ниже формулъ придется узловыя числа возводить въ различныя степени, а также находить $lg\ u(n)$ и $lg\ lg\ u(n)$.

Для нахожденія $lg\ a$ по $Log\ a$ помѣщаются въ полныхъ таблицахъ логариѳмовъ особыя таблицы. Въ первой степени приближенія можно $lg\ a$ получить, дѣля $Log\ a$ на $Log\ e=$ $=0{,}4343$ (точнѣе на $0{,}4342945$).

Что же касается $lg\ lg\ a$, то его можно получить по $Log\ Log\ a$ слѣдующимъ способомъ

$$lg\ lg\ a=\frac{Lg\ Lg\ a}{Lg\ e}+0{,}8340325$$

Для нахожденія li отъ узловыхъ чиселъ въ отрицательныхъ степеняхъ прилагается особая таблица. Къ помѣщенію ея побудило то обстоятельство, что въ наиболѣе извѣстныхъ таблицахъ интегральнаго логариѳма промежутки между данными аргументами слишкомъ велики, а также и ошибки, замѣченныя нами въ этихъ таблицахъ. Такъ у Houel'я $li\ e^{-4,9}$ равно—0,00121 вмѣсто истиннаго числа—0,00129 и у Schlömilch'а $li\ e^{-5}$ равно—0,0014483 вмѣсто—0,0011483 (Compendium Изд. 2-ое II т. стр. 199).

§ 6. Для опредѣленія узловыхъ чиселъ, превышающихъ тысячу, мы дасмъ слѣдующую формулу *)

$$(6)\qquad Log\, u(n) = 7{,}1165926 - m\, sin\left((30^\circ - \frac{\alpha}{3}\right)$$

гдѣ $Log\, m = 1{,}4546126$

и уголъ α опредѣляется изъ уравненія

$$Log\, Cos\, \alpha = Log[5{,}9245870 - Log(x-1)] - 0{,}9435244$$

По этой формулѣ съ большой точностью можно получать узловыя числа въ промежуткѣ отъ 1000 до 100000. Логариѳмы ихъ имѣютъ вѣрными пять десятичныхъ знаковъ и лишь незначительное уклоненіе въ шестомъ.

Пусть напр., требуется опредѣлить, какія предѣльныя узловыя числа соотвѣтствуютъ промежутку отъ 5000 до 5500.

Послѣднее предшествующее этому промежутку простое число есть 4999. Оно есть 669-ое простое число. Послѣднее простое число, принадлежащее взятому промежутку есть 5483, которое есть 725-ое простое число.

Принимая въ уравненіяхъ $x = 669$ найдемъ $\alpha = 69^\circ 19' 38{,}2''$ и затѣмъ

$$u\ (669) = 5000,\ 42.$$

Точно также найдемъ

$$u\ (725) = 5484,\ 02.$$

Итакъ, если намъ нужно найти $\Sigma f(x)$ для простыхъ чиселъ, заключающихся въ промежуткѣ между 5000 и 5500, то мы должны взять

$$\int f(x).\ \Delta(x).\ dx$$

---

*) Въ ней, какъ и въ другихъ мѣстахъ Log означаетъ Log_{10}.

между предѣлами 5000,42 и 5484,02.

Для вывода уравненій (6) нами было найдено выраженіе Log $(R(x)-1)$ черезъ рядъ, содержащій цѣлыя степени $\log x$. Ограничиваясь третьей степенью $\log x$ получаемъ кубическое уравненіе, приводящее къ уравненіямъ (6).

Мы ограничиваемся этими указаніями, такъ какъ уравненія (6) имѣютъ лишь практическое значеніе.

Приложенія принципа узловыхъ точекъ.

§ 7. *Опредѣленіе суммы* $\sum\limits_2^n \frac{1}{p}$.

По формулѣ (5) имѣемъ

$$\int\frac{1}{p}=\int\frac{1}{x}.\ \Delta x.\ dx=\int\frac{1}{x}\left(\frac{1}{lgx}-\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{lgx}-\frac{1}{3}\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{lgx}-\frac{1}{5}\frac{x^{-\frac{4}{5}}}{lgx}+\right)=$$

$$=lg\,lg\,x-\frac{1}{2}\,li\,x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\,li\,x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}\,li\,x^{-\frac{4}{5}}+\frac{1}{6}li\,x^{-\frac{5}{6}}\ \ldots+\text{Const}.$$

Для опредѣленія Const беремъ одно изъ узловыхъ чиселъ. При этомъ возьмемъ ли мы малое или большое число, безразлично. Разница будетъ только въ сложности вычисленія, такъ какъ при маломъ x пужно брать больше членовъ ряда.

Если возьмемъ $\sum\limits_2^{53}\frac{1}{p}$, для которой величина, получаемая непосредственнымъ сложеніемъ дробей, равна 1,680514 то, ограничиваясь 6-ю членами получимъ Const = 0,2618.

Если возьмемъ $\sum\limits_2^{401}\frac{1}{p}$, которой величина есть 2,06127, то получимъ Const равенъ 0,2615.

Такъ какъ послѣднее вычисленіе точнѣе, то выбираемъ для Const вторую величину и будемъ имѣть окончательно

$$\sum^{pt}\frac{1}{p}=\Big|^{u(t)}lg\,lg\,x-\frac{1}{2}\,li\,x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\,li\,x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}\,li\,x^{-\frac{4}{5}}+\ \ldots+0{,}2615 \quad (7)$$

Примѣнимъ эту формулу къ вычисленію $\sum\limits_{2}^{n}\frac{1}{p}$ для случая, когда n значительно уклоняется отъ соотвѣтственнаго узловаго числа. Такъ напр. изъ таблицы видимъ, что для 199 узловое число есть 207,87. Вычисливъ вторую часть при $x=207{,}87$ получимъ 1,9489.

Дѣйствительная величина $\sum\limits_{2}^{199}\frac{1}{p}$, получаемая сложеніемъ дробей есть 1,949034.

Такимъ образомъ уклоненіе ничтожно. Между тѣмъ, если бы мы взяли предѣломъ не узловое число, а само число 199, то оно было бы весьма значительно.

Далѣе мы увидимъ возможность фактически повѣрить формулу (7) въ предѣлахъ значительно превышающихъ тѣ, для которыхъ мы сейчасъ ее разсматривали.

§ 8. *Опредѣленіе суммы* $\Sigma\frac{1}{p^2}$ и $\Sigma\frac{1}{p^3}$. По той же основной формулѣ получимъ

$$\Sigma\frac{1}{p^2}=\int\frac{\Delta x}{x^2}\,dx=li\;x^{-1}-\frac{1}{2}\,li\;x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\,li\;x^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{5}\,li\;x^{-\frac{9}{5}}+\;\ldots\;+\mathrm{Const.}$$

Вычислимъ сумму $\Sigma\frac{1}{p^2}$ до какого нибудь предѣла, напр. до $p=113$. Получимъ 0,45087. Для 113 узловое число есть 121,85, весьма близкое къ $e^{4,8}$. Найдя по таблицамъ $li\;e^{-4,8}$ $li\;e^{-7,2}$, $li\;e^{-8}$, получимъ

$$0{,}45087=-0{,}00145+\frac{1}{2}\cdot0{,}000092+\frac{1}{3}0{,}000038+\;.+\mathrm{Const}$$

откуда $\mathrm{Const}=0{,}45226$

Мы получили для Const. величину весьма близкую къ

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{p^2}=0{,}452247$$

Окончательная формула такова

$$(8)\quad \Sigma\,\frac{1}{p^2}=li\,x^{-1}-\frac{1}{2}\,li\,x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\,li\,x^{-\frac{5}{3}}+\;.\;.\;.\;+0{,}45225$$

Точно также получимъ

$$(9)\quad \Sigma\,\frac{1}{p^3}=li\,x^{-2}-\frac{1}{2}\,li\,x^{-2\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\,li\,x^{-2\frac{2}{3}}-\;.\;.\;.\;+0{,}17476.$$

и вообще

$$(10)\quad \Sigma\,\frac{1}{p^n}=li\,x^{-n+1}-\frac{1}{2}\,li\,x^{-n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\,li\,x^{-n+\frac{1}{3}}-\;.\;.\;.\;+\sum_2^{\infty}\frac{1}{p^n}$$

§ 9. *Опредѣленіе произведенія*

$$\prod_2^n\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\;\Big(1-\frac{1}{3}\Big)\;\Big(1-\frac{1}{5}\Big)\ldots\Big(1-\frac{1}{n}\Big)$$

Для выраженія этого произведенія извѣстны слѣдующія весьма простыя формулы Лежандра

$$\prod_2^n\;\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\frac{\text{Const.}}{lg\;n-0{,}08366}+\,.\;.$$

и Чебышева

$$\prod_2^n\;\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\frac{\text{Const.}}{lg\;n}+\,.\;.$$

Въ обѣихъ этихъ формулахъ являются тѣже два затрудненія, о которыхъ мы говорили въ началѣ статьи: неопредѣленность постояннаго и неопредѣленность предѣла n.

Приложимъ и здѣсь методъ узловыхъ точекъ.

Въ курсахъ Теоріи Чиселъ указывается такое соотношеніе между функціями $\Pi(1-\frac{1}{p})$ и $\Sigma\frac{1}{p}$

$$-lg\;\Pi\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\Sigma\frac{1}{p}+\text{Const}+\omega$$

гдѣ ω суть пренебрегаемые члены, стремящіеся къ нулю съ возрастаніемъ p.

Мы можемъ съ точностью указать значеніе этихъ членовъ.

Взявъ логариѳмъ отъ каждаго множителя и разложивъ его въ рядъ по степенямъ $\frac{1}{p}$, получимъ

$$-lg\, \Pi \left(1-\frac{1}{p}\right)=\Sigma\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{p^2}+\frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{p^3}+\frac{1}{4}\Sigma\frac{1}{p^4}+\ \ldots$$

Подставивъ вмѣсто второй и слѣдующихъ суммъ найденныя выше ихъ выраженія, получимъ

$$-lg\, \Pi \left(1-\frac{1}{p}\right)=\Sigma\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\left(li\ x^{-1}-\frac{1}{2}\ li\ x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\ li\ x^{-\frac{5}{2}}-\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(li\ x^{-2}-\frac{1}{2}li\ x^{-2\frac{1}{2}}-\ldots\ldots\right)+\ldots\ \text{Const.}$$

$$\text{гдѣ Const}=\frac{1}{2}.\ 0{,}45225+\frac{1}{3}.\ 0{,}17176+\ \ldots\ldots$$

Ограничиваясь членами порядка $lix^{-\frac{3}{2}}$ и выше и вычисливъ Const. будемъ имѣть

$$-lg\prod_{2}^{pt}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\Big|^{u,t}\Sigma\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\,li\ x^{-1}-\frac{1}{4}\,li\ x^{-\frac{3}{2}}+0{,}315718\quad (11)$$

Для того чтобы показать весьма большую точность этой формулы и при томъ именно только въ узловыхъ точкахъ, разсмотримъ вычисленіе подробнѣе.

Пусть мы знаемъ, что $\sum_{2}^{113}\frac{1}{p}=1{,}849797$; и $(113)=121{,}85$. Найдя неперовъ логариѳмъ этого числа, можемъ затѣмъ опредѣлить $li\,x^{-1}$ и $li\,x^{-\frac{3}{2}}$ Получимъ

$$li\,x^{-1}=-0{,}001441$$

$$li\,x^{-\frac{3}{2}}=-0{,}000092$$

Сложивъ всѣ четыре члена

$$1,849797-0,000720+0,000023+0,315718$$

получимъ 2,164818.

Въ таблицахъ приложенныхъ къ Теоріи Чиселъ Лежандра найдемъ, что $2\prod_{2}^{113}(1-\frac{1}{p})=0,229540$.

Взявъ неперовъ логариѳмъ, получимъ

$$-\log\prod_{2}^{113}\left(1-\frac{1}{p}\right)=2,16482511$$

Итакъ формула (11) дала вѣрными пять десятичныхъ знаковъ.

Если бы мы вмѣсто узлового числа взяли само число 113, то получили бы 2,16489 т. е. ошибка была бы больше въ 9 разъ.

Такъ какъ въ таблицахъ Лежандра помѣщены величины $\Pi(1-\frac{1}{p})$ до $p=1229$, то при помощи формулы (11) мы можемъ повѣрить точность формулы (7) въ тѣхъ же предѣлахъ т. е. до $p=1229$.

§ 10. *Опредѣленіе* $\Sigma\, lg\, p$.

Вопросъ этотъ нѣсколько иного характера, чѣмъ предъидущіе. Здѣсь слагаемыя идутъ увеличиваясь и потому въ зависимости отъ измѣненія верхняго предѣла формулы ошибка можетъ сдѣлаться весьма значительной.

Важность знанія суммы логариѳмовъ и не имѣніе сколько нибудь удобной формулы заставили искать покрайней мѣрѣ предѣловъ, между которыми эта сумма заключается. Gram приводитъ слѣдующіе предѣлы, вѣрные для достаточно большого n

$$0,9213n-\frac{5}{2}\sqrt{n}<\sum_{2}^{n} lg\, p<\frac{6}{5}0,9213n$$

Написанное неравенство можетъ имѣть теоретическое значеніе, но, вслѣдствіе слишкомъ большой разности между предѣлами, (равной приблизительно $\frac{1}{5}n+\frac{5}{2}\sqrt{n}$) оно не можетъ служить для практическаго опредѣленія $\Sigma\, lg\, p$ [1]).

Прилагая туже основную формулу (5) получимъ

$$\sum_{2}^{pt} lg\, p = \int \Delta x\, lg\, x.\, dx + \text{Const.}$$

$$= \Big|^{u(t)} x - x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{10}} - ,\ldots + \text{Const.} \quad (12)$$

Формула эта настолько проста, что уже давно была бы найдена путемъ догадокъ и повѣрокъ. Но дѣло въ томъ, что она даетъ удовлетворительные результаты только въ узловыхъ точкахъ или вблизи ихъ. Въ остальныхъ же мѣстахъ погрѣшность ея настолько велика, что можетъ заставить сомнѣваться въ ея пригодности.

Хотя члены этой формулы убываютъ, она тѣмъ не менѣе представляетъ рядъ не сходящійся, а колеблющійся, такъ какъ величина членовъ стремится къ единицѣ.

Если же мы возьмемъ интегралъ между двумя предѣлами, то во всякомъ случаѣ получимъ рядъ съ членами, стремящимися къ нулю, а не къ единицѣ.

Въ самомъ дѣлѣ будемъ имѣть

$$\sum_{2}^{b} lg\, p - \sum_{2}^{a} lg\, p = (b-a) - \left(b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right) - \left(b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right) - \ldots$$

---

[1]) Тоже можно сказать о формулѣ Мертенса для $\Sigma\frac{1}{p}$, по которой

$$\sum_{2}^{n} \frac{1}{p} = lg\, lg\, n + C - H \pm \delta$$

гдѣ $C-H$ есть точно опредѣляемое постоянное, а δ по абсолютной величинѣ менѣе $\frac{4}{lg(n+1)} + \frac{2}{n\, lg n}$.

Такъ какъ въ разностяхъ оба члена стремятся къ единицѣ, то сами разности стремятся къ нулю.

Для примѣра опредѣлимъ сумму логариѳмовъ простыхъ чиселъ заключающихся между 5000 и 5500. Выше мы по формулѣ (6) нашли, что предѣльныя узловыя числа таковы 5000,42 и 5484,02. Подставляя эти числа въ правую часть формулы и ограничиваясь шестью членами, найдемъ

$$\sum_{2}^{5483} lg\,p - \sum_{2}^{4999} lg\,p = 479,64$$

Взявъ на самомъ дѣлѣ сумму логариѳмовъ простыхъ чиселъ въ этомъ промежуткѣ, получимъ 479,67689.

Можно формулу $\Sigma\, lg\,p$ написать съ постояннымъ, но при этомъ обязательно брать въ ней столько членовъ, сколько брали при опредѣленіи постояннаго.

Возьмемъ изъ таблицы любое узловое число, напр. 163,92 и при помощи помѣщеннаго рядомъ десятичнаго логариѳма его опредѣлимъ его дробныя степени. При этомъ ограничимся шестью членами.

Дѣйствительная сумма логариѳмовъ отъ 2 до 163 равна 146, 815. Получимъ

$$146,815 = 143,138 + \mathrm{Const}$$

откуда Const = 3,677

Слѣдовательно окончательная формула будетъ такова

$$\sum_{2}^{p_t} lg\,p = \Big|^{u(t)} x - x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{7}} + 3,677$$

Для примѣра опредѣлимъ по этой формулѣ сумму логариѳмовъ простыхъ чиселъ отъ 2 до 331. Получимъ 305,821. Дѣйствительная сумма логариѳмовъ равна 305,799.

§ 11. *Выраженіе суммы простыхъ чиселъ, не превосходящихъ даннаго предѣла.*

Въ предъидущихъ вопросахъ методъ узловыхъ чиселъ имѣлъ только преимущество передъ методомъ произвольныхъ предѣловъ. Въ настоящемъ вопросѣ этотъ методъ является безусловно необходимымъ.

Сумма простыхъ чиселъ, не превосходящихъ извѣстнаго предѣла, приблизительно пропорціональна квадрату этого предѣла, слѣд. измѣняется значительно даже при сравнительно небольшомъ измѣненіи предѣла. Пусть, напр. мы желаемъ приложить формулу къ опредѣленію суммы простыхъ чиселъ, не превосходящихъ 113. Узловое число, соотвѣтствующее 113, есть 121,85. Поэтому, если формула даетъ вѣрный результатъ при $x = 121{,}85$, то при $x = 113$ даетъ результатъ, относящійся къ истинному приблизительно, какъ $113^2 : 122^2$ т. е. будетъ давать ошибку, доходящую до $\frac{1}{7}$ части опредѣляемой величины.

Это обстоятельство и было причиной того, что до сихъ поръ аналитическія формулы для суммы простыхъ чиселъ оказывались не примѣнимыми.

Прилагая къ данному вопросу туже основную формулу (5), будемъ имѣть

$$\Sigma\, p = \int x\, \Delta(x)\, dx$$

Остается найти удобно интегрируемое выраженіе для $x\,\Delta(x)$.

Подставляя вмѣсто $\Delta(x)$ выраженіе формулы (2), мы получили бы слишкомъ медленно сходящійся рядъ. Поэтому мы поступимъ нѣсколько иначе.

По формулѣ (4) имѣемъ

$$x\Delta(x) = \frac{1}{1!S_2} + \frac{lg\, x}{2!S_3} + \frac{lg^2 x}{3!S_4} + \frac{lg^3 x}{4!S_5} + \ldots$$

Чтобы получить болѣе сходящійся рядъ, прибавимъ во второй части выраженіе

$$\frac{1}{lg\,x}\left(x-1-\frac{lg\,x}{1!}-\frac{lg^2\,x}{2!}-\frac{lg^3\,x}{3!}\;.\;.\;.\right)$$

которое тождественно равно нулю, такъ какъ $x=e^{lg\,x}$.

Будемъ имѣть

$$x\Delta(x)=\frac{x}{lg\,x}-\frac{1}{lg\,x}-\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{S_2}\right)-\frac{lg\,x}{2!}\left(1-\frac{1}{S_3}\right)-\frac{lg^2\,x}{3!}\left(1-\frac{1}{S_4}\right)$$

Во второй части множители $1-\frac{1}{S_n}$ съ возрастаніемъ n приближаются къ $\frac{1}{2^n}$. Поэтому членъ

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{S_{n+1}}\right)lg\,x^{n-1}$$

приближается къ величинѣ $\frac{1}{n!}\,\frac{lg^{n-1}}{2^{n+1}}$ или

$$\frac{1}{2lg\,x}\left(\frac{lg^n x}{n!.2^n}\right)$$

Прибавивъ во второй части тождественно равное нулю выраженіе

$$\frac{1}{2lg\,x}\left(-\sqrt{x}+1+\frac{lg\,x}{1!2}+\frac{lg^2\,x}{2!2^2}+\frac{lg^3\,x}{3!2^3}+\;.\;.\;.\right)$$

получимъ еще болѣе быстро сходящійся рядъ. Будемъ имѣть

$$x\Delta x=\frac{x}{lg\,x}-\frac{1}{lg\,x}+\frac{1}{2lg\,x}-\frac{\sqrt{x}}{2lg\,x}-\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{S_2}-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{lg\,x}{2!}\left(1-\frac{1}{S_3}-\frac{1}{2^3}\right)\;.\;.\;.$$

Замѣчая, что разность $1-\frac{1}{S_n}-\frac{1}{2^n}$ стремится къ $\frac{1}{3^n}$, можемъ повторить послѣднее преобразованіе и тогда получимъ весьма быстро сходящійся рядъ

$$x\Delta(x)=\frac{x}{lg\,x}-\frac{1}{lg\,x}+\frac{1}{2lg\,x}+\frac{1}{3lg\,x}-\frac{\sqrt{x}}{2lg\,x}-\frac{\sqrt[3]{x}}{3lg\,x}$$

$$-\frac{1}{1'.}\left(1-\frac{1}{S_2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)-\frac{1}{2'.}\left(1-\frac{1}{S_3}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)lg\,x-\ldots \quad (13)$$

Обозначая величину $1-\frac{1}{Sn}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$ черезъ k_n будемъ имѣть

$$\int x\Delta x=li(x^2)-\frac{1}{6}li(x)-\frac{1}{2}li\left(x^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{3}li\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$-\frac{k_2 x}{1'.}-\int\frac{k_3 lgx dx}{2'.}-\int\frac{k_4 lg^2 x dx}{3'.}\ldots$$

Взявъ во второй части интегралы, получимъ

$$\int x\Delta x=li(x^2)-\frac{1}{6}li(x)-\frac{1}{2}li\left(x^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{3}li\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$-x\left(k_2-\frac{k_3}{2}+\frac{k_4}{3}-\frac{k_5}{4}+\ldots\right)-\frac{x\,lg\,x}{1'.}\left(\frac{k_3}{2}-\frac{k_4}{3}+\frac{k_5}{4}\right)-\ldots$$

Вычисляя коэффиціенты, получимъ окончательно

$$\sum_2^{pt} p=\Big|^{u\,t)} li(x^2)-\frac{1}{6}li(x)-\frac{1}{2}li\left(x^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{3}li\left(x^{\frac{4}{3}}\right)-$$

$$-x(0{,}02828611+lgx.\ 0{,}00267568+lg^2x.\ 0{,}00017606$$

$$+lg^3x.\ 0{,}00000886+lg^4x.\ 0{,}00000036$$

$$+lg^5x.\ 0{,}00000001+\ldots)+\mathrm{Const} \qquad (14)$$

Опредѣляя Const при $x=3=e^{1,1}$ получимъ приблизительно Const$=3$.

Примѣнимъ формулу (14) къ какому нибудь частному случаю. Напр. опредѣлимъ сумму простыхъ чиселъ, не превышающихъ 733. Узловое число, соотвѣтствующее 733, есть $735=e^{6,6}$. Ограничиваясь внутри скобокъ четырьмя членами, получимъ, что искомая сумма равна 43182. Сложивъ въ дѣйствительности простыя числа отъ 2 до 733 получимъ 43201.

Слѣд. ошибка равна 0,00044 опредѣляемой величины. Если бы мы въ той же формулѣ вмѣсто узлового числа 735 взяли верхнее простое число 733, то вмѣсто 19 единицъ получили бы ошибку въ 245 единицъ.

§ 12. Покажемъ на примѣрѣ, какимъ образомъ вычисляются формулы, содержащія интегральный логариѳмъ.

Найдемъ по формулѣ (14) приближенную величину суммы простыхъ чиселъ, не превышающихъ 113.

Узловое число для 113 есть 121,85. Неперовъ логариѳмъ его получимъ, дѣля приведенный въ таблицахъ десятичный логариѳмъ на 0,4343. Найдемъ $121,85 = e^{4,803}$

По формулѣ (14) будемъ имѣть

$$\sum_{2}^{113} p = li\, e^{9,606} - \frac{1}{6}\, li\, e^{4,803} - \frac{1}{2}\, li\, e^{7,2045} - \frac{1}{3}\, li\, e^{6,404} -$$

$$- 121,85(0,0283 + 0,00268 \,.\, 4,8 + 0,000176 \,.\, 4,8^2)$$

Ввиду того, что выраженіе внутри скобокъ даетъ сравнительно малую часть искомой величины, можно ограничиться внутри скобокъ небольшимъ числомъ десятичныхъ знаковъ.

Таблица [1]), приложенная въ концѣ статьи, даетъ величины $li\, e^{9,6}$, $li\, e^{4,8}$ и т. д. Величины сосѣднія можно получать по приближенной формулѣ

$$li\, e^{\alpha+h} = li\, e^{\alpha} + \frac{e^{\alpha}}{\alpha + \frac{h}{2}}\left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \ldots\right)$$

гдѣ члены $\frac{h^2}{2} + \ldots$ можно принимать вовниманіе только при вычисленіи главнаго члена формулы т. е. $li\, x^2$.

---

[1]) При составленіи ея мы пользовались таблицами Houel'я и Gram'а.

Будемъ имѣть

$$li \overset{9{,}606}{\underset{34{,}70}{e}} = 1752{,}14 + \frac{14764{,}8 \,.\, 0{,}006}{9{,}603} = 1761{,}36$$

$$li \overset{4{,}803}{e} = 34{,}70 + \frac{121{,}51 \,.\, 0{,}003}{4{,}801} = 34{,}78$$

$$li \overset{7{,}2045}{e} = 225{,}69 + \frac{1339{,}4 \,.\, 0{,}0045}{7{,}202} = 226{,}53$$

$$li \overset{6{,}404}{e} = 117{,}93 + \frac{601{,}8 \,.\, 0{,}004}{6{,}402} = 118{,}34$$

Вычитая изъ перваго результата сумму $\frac{1}{6}$ второго, половины третьяго и $\frac{1}{3}$ четвертаго, получимъ 1602,86.

Эта величина и служитъ первымъ приближеннымъ выраженіемъ искомой.

Чтобы найти поправочную часть, множимъ 0,000176 на 4,8 и прибавляемъ 0,00268. Результатъ множимъ на 4,8 и прибавляемъ 0,0283. Умножая результатъ на 121,85 найдемъ, что послѣдній членъ формулы равенъ 5,04.

Итакъ $\sum\limits_{2}^{113} p = 1597{,}82$ [1])

Дѣйствительная сумма простыхъ чиселъ отъ 2 до 113 равна 1593. Мы видимъ, что разница очень не велика.

При возрастаніи верхняго предѣла суммы сложность вычисленій почти не увеличивается, что и составляетъ важное преимущество аналитическихъ формулъ передъ числовыми, которыя очень легко вычисляются для малаго предѣла и часто дѣлаютъ почти невозможнымъ полученіе результата въ случаѣ большихъ чиселъ.

---

[1]) Поставивъ въ той же формулѣ вмѣсто узлового числа верхнее предѣльное 113 получили бы $\sum\limits_{2}^{113} p = 1394$.

Приложенная таблица интегральнаго логариөма даетъ возможность находить сумму простыхъ чиселъ значительно превышающихъ 22026.

§ 13. Принципъ, поставленный нами въ основѣ изслѣдованій настоящей статьи (равенство 5) безусловно точенъ, если въ $\Sigma f(p)$ fp есть постоянное; затѣмъ онъ даетъ результатъ, погрѣшность котораго стремится къ нулю съ возрастаніемъ n, если $f(n)$ есть функція убывающая или стремящаяся къ постоянному предѣлу: наконецъ въ томъ случаѣ, когда $f(p)$ неопредѣленно возрастаетъ, какъ напр. въ $\Sigma\, lg\, p$ или Σp, какъ мы видѣли, этотъ принципъ, сравнительно съ методомъ произвольныхъ предѣловъ, даетъ ошибку высшаго порядка.

Теперь мы переходимъ къ распространенію принципа узловыхъ точекъ на другія функціи. Разсмотрѣвъ его въ приложеніи къ нѣкоторымъ функціямъ, значительно болѣе простымъ, чѣмъ функція R, мы затѣмъ вернемся къ этой функціи и укажемъ ея новыя свойства.

Распространеніе принципа узловыхъ точекъ.

§ 14. Пусть мы имѣемъ рядъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_t$$

которыя непрерывно возрастаютъ по нѣкоторому закону и пусть функція $F(x)$ выражаетъ вѣроятнѣйшую величину числа такого рода чиселъ, не превосходящихъ предѣла x. Пусть V есть функція, обратная функціи F, такъ что, если $y=F(x)$, то $x=V(y)$. Значенія $V(1)$, $V(2)$, $V(3)$ . . . будемъ называть узловыми числами функціи F, а точки кривой $y=F(x)$, имѣющія ихъ абсциссами, будемъ называть узловыми точками функціи $F(x)$. Тогда принципъ будетъ состоять въ слѣдующемъ:

$$(15)\quad \sum_{a_{t+1}}^{a_{t'}} f(x) = \int_{v(t)}^{v(t')} f(x).\ F'(x).\ dx$$

т. е. *что вѣроятнѣйшая величина суммы значеній функціи $f(x)$, распространенной на числа a_{t+1}, a_{t+2}, . . . $a_{t'}$, равна интегралу отъ $f(x)$. $F'(x)$, гдѣ $F'(x)$ есть производная отъ функціи, выражающей число чиселъ a, не превосходящихъ x, и интегралъ взятъ между узловыми точками этой функціи.*

Разсмотримъ этотъ принципъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

§ 15. *Выраженіе суммы чиселъ, взаимно простыхъ съ произведеніемъ $2.\ 3.\ 5\ .\ .\ .\ p_t$.*

Возьмемъ сначала случай двухъ множителей. Такъ какъ въ каждыхъ 6 числахъ заключается 2 числа, взаимно простыхъ съ 2. 3, то число этихъ чиселъ, не превосходящихъ предѣла x, приближенно выразится функціей $\frac{x}{3}$.

При этомъ нужно обратить вниманіе на слѣдующее весьма важное обстоятельство.

Если мы на предѣлъ x не накладываемъ никакого условія, то построивъ точки, имѣющія абсциссами 1, 5, 7, 11 . . . и т. д., а ординатами числа 1, 2, 3, . . . легко замѣтимъ, что число чиселъ a, не превосходящихъ x, выразится лѣстницеобразной линіей, и что нѣкоторая кривая линія, ассимптотически приближающаяся къ прямой $y = \frac{x}{3}$, будетъ давать въ среднемъ равные по абсолютной величинѣ положительныя и отрицательныя уклоненія.

Если же мы за предѣлъ x будемъ выбирать исключительно числа, взаимно-простыя съ 2. 3, то ассимптота кривой перемѣстится выше и выразится прямой $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$.

Такъ напр. до 5 чиселъ a два; по формулѣ $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ получимъ $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}$ или $2\frac{1}{6}$. До 7 чиселъ a три. По формулѣ получимъ $\frac{7}{3} + \frac{1}{2}$ или $\frac{17}{6}$. Точно также убѣдимся, что и во всѣхъ слѣдующихъ точкахъ уклоненіе равно $+\frac{1}{6}$ или $-\frac{1}{6}$.

Построивъ точки, выражающія числа a, взаимнопростыя съ произведеніями 2. 3. 5; 2. 3. 5. 7 и т. д. убѣдимся, что вообще вѣроятнѣйшая величина числа чиселъ взаимнопростыхъ съ произведеніемъ 2. 3. 5 . . . p_k выражается формулой

$$y = \frac{1.\ 2.\ 4.\ 6\ \ (p_k - 1)}{2.\ 3.\ 5.\ 7 \ldots p_k} x + \varepsilon$$

гдѣ ε имѣетъ величину равную нулю, если на предѣлъ x не наложено никакого условія, и ε равно $\frac{1}{2}$, если за предѣлъ x принимается постоянно одно изъ чиселъ a.

Для насъ важно показать, что этотъ результатъ, относящійся къ величинѣ ε, можетъ быть выведенъ изъ формулы (15). Подставимъ въ этой формулѣ вмѣсто $f(x)$ число чиселъ взаимнопростыхъ съ 2. 3. Такихъ чиселъ до 1, 5, 7, 11 существуетъ 1, 2, 3, 4 и т. д. Слѣдовательно, если мы возьмемъ t слагаемыхъ, то въ 1-ой части получимъ $\frac{t^2+t}{2}$. Во 2-ой части вмѣсто $f(x)$ нужно подставить $\frac{x}{3} + \varepsilon$, гдѣ ε пока еще неизвѣстная величина, принимаемая нами за постоянную. Вмѣсто $F'(x)$ нужно подставить производную отъ $\frac{x}{3}$ и взять интегралъ между узловыми точками.

Такъ какъ $y = \frac{x}{3}$, то $x = 3y$. Слѣдовательно узловыя числа будутъ 0, 3, 6, . . . $3t$.

Будемъ имѣть

$$\frac{t^2+t}{2} = \Big|_0^{3t} \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}+\varepsilon\right)^2 = \frac{t^2+2t\varepsilon+\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Для того, чтобы первая часть при возрастаніи t оставалась въ равенствѣ со второй, ε должно равняться $\frac{1}{2}$.

Совершенно тоже разсужденіе повторяется и въ общемъ случаѣ т. е. для числа чиселъ, взаимнопростыхъ съ произведеніемъ 2. 3, 5 . . . p_k.

Въ случаѣ ряда натуральныхъ чиселъ, т. е. въ частномъ случаѣ предъидущаго, мы точно также будемъ имѣть, что выраженіе числа натуральныхъ чиселъ, не превосходящихъ x, если за верхній предѣлъ принимаемъ одно изъ натуральныхъ чиселъ, будетъ равно x; если же на предѣлъ x не наложено никакого ограниченія, то искомое выраженіе есть $x-\frac{1}{2}$, то есть, какъ и въ общемъ случаѣ, первое выраженіе больше второго на $\frac{1}{2}$.

Зная выраженіе числа чиселъ a, не превосходящихъ предѣла x, легко найдемъ Σa по формулѣ (15)

Примѣръ. Найдемъ сумму первыхъ 10 чиселъ, взаимнопростыхъ съ 2. 3.

Такъ какъ здѣсь $y=F(x)=\frac{x}{3}$, то $x=3y$.

Полагая $t=10$, получимъ

$$\sum_{a_1}^{a_{10}} a = \int_0^{30} x.\frac{1}{3}dx = 150$$

Сложивъ числа a въ дѣйствительности, также найдемъ 150.

§ 16. *Сравненіе формулы 15 съ формулой Эйлера.*

Такъ какъ для ряда натуральныхъ $y + F(x) = x - \frac{1}{2}$, то узловыя числа будутъ $x = t + \frac{1}{2}$ и формула (15) обращается въ слѣдующую

$$(16) \quad \Sigma f(x) = \int^{t+\frac{1}{2}} f(x)\, d\,x + \text{Const.}$$

Для выраженія суммы значеній функціи $f(x)$, распространенной на рядъ натуральныхъ чиселъ, извѣстна формула Эйлера

$$\Sigma f(x) = \text{Const} + \int f(x)\, dx + \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{12} f'(x) + \ldots$$

формула (16) выгоднѣе въ томъ отношеніи, что все искомое выраженіе объединяется въ одномъ интегралѣ. Что же касается до уклоненія ея, то мы покажемъ, что оно двумя порядками ниже высшаго члена второй части формулы. Въ самомъ дѣлѣ пусть $\int fx.\, dx = \varphi(x)$

Тогда по формулѣ (16) имѣемъ

$$\sum_{1}^{t} fx = \varphi\left(t + \frac{1}{2}\right) + \text{Const} = \text{Const} + \varphi(t) + \frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{1}{8}\varphi''t + \ldots$$

и по формулѣ Эйлера

$$\sum_{1}^{t} fx = \text{Const} + \varphi(t) + \frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{1}{12}\varphi''(t) +$$

Такимъ образомъ оказывается, что выраженіе (16-ой) формулы содержитъ излишній придатокъ, равный $\frac{1}{24}\varphi''t$.

Если функція $f(x)$ порядка перваго или ниже перваго, то этотъ придатокъ есть постоянная величина или съ воз-

растаніемъ t стремится къ ней. Такимъ образомъ, напр., при опредѣленіи $\Sigma\frac{1}{x}$ по формулѣ (16) сравнительно съ формулой Эйлера получимъ придатокъ равный $-\frac{1}{24}t^2$, стремящійся къ нулю съ возрастаніемъ t.

Къ тѣмъ же заключеніямъ мы придемъ, если будемъ вмѣсто ряда натуральныхъ чиселъ брать рядъ чиселъ взаимнопростыхъ съ произведеніемъ 2. 3. 5. p_k.

Функція $\Theta(x)$, выражающая число простыхъ чиселъ, не превосходящихъ x, вполнѣ аналогична съ функціей $\psi(x,p_k)$, выражающей число чиселъ, не превосходящихъ x и взаимнопростыхъ съ произведеніемъ 2. 3. 5 . . . p_k, и при $k=\Theta(\sqrt{x})$ связана съ ней соотношеніемъ

$$\Theta(x)=\psi(x,p_k)+\Theta(\sqrt{x})-1$$

показывающимъ, что уклоненія одной изъ нихъ того же порядка, какъ и уклоненія другой.

Это позволяетъ и на функцію $R(x)$ распространить тоже заключеніе, а именно что уклоненіе второй части формулы (5) есть величина двумя порядками ниже сравнительно съ порядкомъ старшаго члена этой части.

§ 17. Тѣмъ же разсужденіемъ, которое мы примѣняли въ § 15, изъ формулы (15) выводится, что и для функціи R имѣетъ мѣсто слѣдующее.

Вѣроятнѣйшая величина $\Theta(x)$ есть $R(x)+E$, гдѣ ε равно нулю, если на верхній предѣлъ не наложено никакого условія и $\varepsilon=\frac{1}{2}$, если этотъ предѣлъ есть простое число.

Это заключеніе, которое такъ просто выводится изъ формулы (5), было бы затруднительно сдѣлать по числовымъ величинамъ уклоненій функціи R въ виду того, что эти уклоненія достигаютъ значительной абсолютной величины.

Кромѣ того практическаго интереса, что мы при замѣнѣ $\Sigma\Theta(p)$ выраженіемъ $\Sigma(R(x)+{}^1/_2)$ избѣгаемъ ошибки равной ${}^1/_2$, умноженой па число слагаемыхъ, выведенное свойство $R(x)$ имѣетъ слѣдующее весьма важное теоретическое значеніе.

Вѣроятнѣйшая величина $\Theta(p)$, какъ мы видѣли, есть $R(p)+{}^1/_2$.

Но такъ какъ $\Theta(p_t)$ равно t, то вмѣсто

$$\Theta(p_t)=R(p_t)+\frac{1}{2}$$

можно написать

$$t=R(p_t)+\frac{1}{2}$$

откуда $R(p_t)=t-\frac{1}{2}$

Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства функцію u, на основаніи обратности функцій u и R получимъ

$$p_t=u\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Итакъ мы получили выраженіе *наивѣроятнѣйшей величины* t-го простого числа

Въ послѣднихъ четырехъ равенствахъ мы употребляли знакъ = не въ обыкновенномъ его значеніи, а въ томъ, что вѣроятнѣйшая величина первой части была равна второй. Чтобы возстановить нормальное употребленіе знака равенства, условимся вѣроятнѣйшую величину t го простого числа обозначать черезъ $P(t)$. Тогда будемъ имѣть

$$(17 \qquad P(t)=u\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Разложеніе логариѳма функціи u въ рядъ.

§ 18. Важность значенія функціи u въ разсмотренныхъ нами вопросахъ побуждаетъ искать возможности вычислять ее непосредственно для какого угодно аргумента.

Постараемся найти разложеніе ея или ея логариѳма въ рядъ.

Можно найти рядъ, выражающій $lg\ u(1+x)$. Но такъ какъ $u(0)=0$, то $lg\ u(1+x)$ при $x=-1$ обращается въ ∞ и потому рядъ можетъ быть сходящимся только при условіи, что модуль x меньше 1.

Въ практическомъ отношеніи болѣе интересно другое разложеніе.

Такъ какъ намъ извѣстно разложеніе въ рядъ функціи $R(e^x)$ (формула 3) и притомъ мы знаемъ, что $u(1)=1$ и $u(0)=0$, то естественно сдѣлать предположеніе

$$u\left(e^x\right)=e^{a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ \dots\ .}$$

и при помощи выраженія $R(e^x)$ искать опредѣлить коэффиціенты a.

Возьмемъ отъ обѣихъ частей функцію R. Получимъ

$$e^x = R\left(e^{a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ \dots}\right)$$

Разложивъ первую часть по степенямъ x и вторую часть при помощи формулы

$$R\left(e^z\right) = 1+\frac{z}{S_2}+\frac{z^2}{2'.2S_3}+\frac{z^3}{3'.3S_4}+\ \dots$$

приравняемъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x. Получимъ:

$$\frac{a_1}{S_2}=1$$

$$\frac{a_2}{S_2}+\frac{a_1^2}{2.'2S_3}=\frac{1}{2'.}$$

$$\frac{a_3}{S_2}+\frac{2a_1a_2}{2'.2S_3}+\frac{a_1^3}{3'.3S_4}=\frac{1}{3'.}$$

$$\frac{a_4}{S_2}+\frac{a_2^2+2a_1a_3}{2.2S_3}+\frac{3a_1^2a_2}{3'.3S_4}+\frac{a_1^4}{4'.4S_5}=\frac{1}{4'.}$$

. . . .

Если мы условимся измѣреніемъ указателей одночлена называть сумму его указателей, умноженныхъ на показателей, такъ что, напр., членъ $a_1^2a_2$ есть членъ 4-го измѣренія, то можемъ законъ составленія написанныхъ выше равенствъ выразить такъ: Въ равенствѣ, начинающемся съ члена $\frac{a_m}{S_2}$, членъ, имѣющій знаменателемъ $n'.nS_{n+1}$ имѣетъ числителемъ сумму членовъ m-го измѣренія, взятыхъ изъ выраженія $(a_1+a_2+a_3+\ldots)^n$.

Опредѣляя послѣдовательно a_1, a_2, a_3 . . , будемъ имѣть

$a_1=\ \ 1{,}6449341$	$a_4=-0{,}0016821$
$a_2=-0{,}1032121$	$a_5=\ \ 0{,}000150$
$a_3=\ \ 0{,}0145133$	$a_6=-0{,}000009$
	. . . . .

Затѣмъ $u(e^x)$ опредѣлится по формулѣ

$$lg\ u\left(e^{x}\right)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ \ldots \tag{18}$$

Ради удобства вычисленій приводимъ также десятичные логариѳмы коэффиціентовъ.

$Log\ \ a_1=0{,}2161485$	$Log\ \ a_3=0{,}1617650-2$
$Log-a_2=0{,}0137305-1$	$Log-a_4=0{,}2258518-3$

§ 19. Условимся числа P называть *средними* простыми числами. Приводимъ величины десяти первыхъ среднихъ простыхъ чиселъ рядомъ съ соотвѣтствующими имъ дѣйствительными простыми числами.

2	0,303	13	12,99
3	1,917	17	16,36
5	4,182	19	19,90
7	6,845	23	23,58
11	9,804	29	27,39

Уже эта краткая таблица показываетъ, что среднія простыя числа только въ началѣ отстаютъ отъ дѣйствительныхъ. Затѣмъ, сравнявшись при 13, идутъ дальше безпрерывно мѣняя знакъ уклоненія.

По мѣрѣ возрастанія среднія простыя числа стремятся къ средней ариѳметической величинѣ между ближайшими узловыми числами. Сложивъ $u(9)$ и $u(10)$ и раздѣливъ на 2, получимъ 27,40 между тѣмъ $P(10)=27,39$. Слѣд. разница уже равна только 0,01. Для слѣдующихъ среднихъ простыхъ чиселъ она еще меньше.

§ 20. Формула (17) позволяетъ непосредственный переходъ отъ числовыхъ функцій къ аналитическимъ, представляющимъ ихъ вѣроятнѣйшую величину.
Этотъ переходъ состоитъ въ томъ, что мы вмѣсто простыхъ чиселъ p ставимъ въ данной функціи выраженія среднихъ простыхъ чиселъ и такимъ образомъ изъ области теоріи чиселъ вопросъ переходитъ въ область Анализа.

Этимъ мы и заканчиваемъ настоящую статью. Весьма важное приложеніе принципа узловыхъ точекъ къ суммированію безконечныхъ рядовъ оставляемъ до дальнѣйшаго.

22 Іюля
1888 года.

Таблица узловыхъ чиселъ $u(\alpha)$, не превышающихъ тысячи, и ихъ десятичныхъ логариѳмовъ.

α	$u(\alpha)$	$Log\, u(\alpha)$	p_α	α	$u(\alpha)$	$Log\, u(\alpha)$	p_α
1	1,00	0,0000	2	29	116,75	2,0672	109
2	3,00	0,4777	3	30	121,85	2,0858	113
3	5,47	0,7383	5	31	126,99	2,1038	127
4	8,29	0,9186	7	32	132,17	2,1211	131
5	11,37	1,0557	11	33	137,38	2,1379	137
6	14,65	1,1659	13	34	142,62	2,1542	139
7	18,11	1,2580	17	35	147,88	2,1699	149
8	21,73	1,3370	19	36	153,21	2,18529	151
9	25,47	1,4061	23	37	158,55	2,20016	157
10	29,33	1,4674	29	38	163,92	2,21463	163
11	33,31	1,5225	31	39	169,32	2,22870	167
12	37,38	1,5726	37	40	174,74	2,24240	173
13	41,54	1,6185	41	41	180,20	2,25575	179
14	45,78	1,6607	43	42	185,68	2,26877	181
15	50,10	1,6999	47	43	191,19	2,28146	191
16	54,50	1,7364	53	44	196,72	2,29385	193
17	58,96	1,7706	59	45	202,28	2,30596	197
18	63,49	1,8027	61	46	207,87	2,31779	199
19	68,08	1,8330	67	47	213,48	2,32935	211
20	72,73	1,8617	71	48	219,11	2,34066	223
21	77,43	1,8889	73	49	224,76	2,35172	227
22	82,18	1,9148	79	50	230,44	2,36256	229
23	86,98	1,9394	83	51	236,14	2,37318	233
24	91,84	1,9630	89	52	241,86	2,38357	239
25	96,74	1,9856	97	53	247,61	2,39376	241
26	101,68	2,0072	101	54	253,37	2,40376	251
27	106,66	2,0280	103	55	259,16	2,41357	257
28	111,69	2,0480	107	56	264,96	2,42319	263

α	$u(\alpha)$	$Log\, u(\alpha)$	p_α
57	270,79	2,43263	269
58	276,64	2,44191	271
59	282,50	2,45101	277
60	288,38	2,45997	281
61	294,29	2,46877	283
62	300,21	2,47742	293
63	306,15	2,48593	307
64	312,10	2,49430	311
65	318,07	2,50253	313
66	324,06	2,51063	317
67	330,07	2,51861	331
68	336,10	2,52646	337
69	342,14	2,53420	347
70	348,19	2,54182	349
71	354,27	2,54933	353
72	360,36	2,55673	359
73	366,46	2,56402	367
74	372,58	2,57122	373
75	378,71	2,57831	379
76	384,86	2,58531	383
77	391,03	2,59221	389
78	397,20	2,59901	397
79	403,40	2,60573	401
80	409,61	2,61237	409
81	415,83	2,61891	419
82	422,06	2,62538	421
83	428,31	2,63176	431
84	434,58	2,63807	433
85	440,85	2,64429	439
86	447,14	2,65044	443
87	453,44	2,65652	449
88	459,75	2,66252	457
89	466,08	2,66846	461
90	472,42	2,67433	463
91	478,78	2,68013	467
92	485,13	2,68586	479
93	491,51	2,69153	487
94	497,90	2,69714	491
95	504,30	2,70269	499
96	510,71	2,70818	503
97	517,14	2,71361	509
98	523,58	2,71898	521
99	530,02	2,72429	523
100	536,48	2,72955	541
101	542,94	2,73475	547
102	549,41	2,73990	557
103	555,91	2,74501	563
104	562,41	2,75006	569
105	568,93	2,75506	571
106	575,45	2,76001	577
107	581,99	2,76491	587
108	588,53	2,76977	593
109	595,09	2,77458	599
110	601,66	2,77935	601
111	608,23	2,78407	607
112	614,81	2,78874	613
113	621,41	2,79338	617
114	628,02	2,79797	619
115	634,63	2,80252	631
116	641,26	2,80703	641
117	647,89	2,81151	643
118	654,53	2,81593	647
119	661,18	2,82032	653
120	667,85	2,82468	659
121	674,53	2,82900	661
122	681,21	2,83328	673
123	687,91	2,83753	677
124	694,61	2,84174	683
125	701,31	2,84591	691
126	708,03	2,85005	701
127	714,76	2,85416	709
128	721,49	2,85823	719
129	728,24	2,86227	727
130	734,99	2,86628	733
131	741,75	2,87026	739
132	748,52	2,87420	743
133	755,30	2,87812	751
134	762,09	2,88201	757

α	$u(\alpha)$	Log $u(\alpha)$	$p\alpha$
135	768,69	2,88586	761
136	775,69	2,88969	769
137	782,50	2,89348	773
138	789,32	2,89725	787
139	796,15	2,90099	797
140	802,99	2,90471	809
141	809,83	2,90840	811
142	816,68	2,91206	821
143	823,55	2,91569	823
144	830,41	2,91930	827
145	837,29	2,92288	829
146	844,17	2,92643	839
147	851,05	2,92996	853
148	857,96	2,93347	857
149	864,87	2,93695	859
150	871,78	2,94041	863
151	878,70	2,94384	877
152	885,63	2,94725	881
153	892,56	2,95064	883
154	899,51	2,95401	887
155	906,46	2,95735	907
156	913,42	2,96067	911
157	920,39	2,96397	919
158	927,36	2,96725	929
159	934,34	2,97051	937
160	941,32	2,97374	941
161	948,32	2,97696	947
162	955,32	2,98015	953
163	962,33	2,98332	967
164	969,34	2,98648	971
165	976,36	2,98961	977
166	983,39	2,99273	983
167	990,42	2,99582	991
168	997,46	2,99890	997

Таблица величинъ $li\, e^{-x}$.

x	$li\, e^{-x}$	x	$li\, e^{-x}$	x	$li\, e^{-x}$	x	$li\, e^{-x}$
2,00	—0,04890	3,00	—0,01305	4,0	—0,00378	6,0	—0,00036
2,05	—0,04566	3,05	—0,01224	4,1	—0,00335	6,1	—0,00032
2,10	—0,04265	3,10	—0,01149	4,2	—0,00297	6,2	—0,00029
2,15	—0,03982	3,15	—0,01078	4,3	—0,00263	6,3	—0,00026
2,20	—0,03719	3,20	—0,01013	4,4	—0,00234	6,4	—0,00023
2,25	—0,03476	3,25	—0,00951	4.5	—0,00207	6,5	—0,00020
2,30	—0,03250	3,30	—0,00894	4,6	—0,00184	6,6	—0,00018
2,35	—0,03040	3,35	—0,00840	4,7	—0,00164	6,7	—0,00016
2,40	—0,02844	3,40	—0,00789	4,8	—0,00145	6,8	—0,00014
2,45	—0,02661	3,45	—0,00741	4,9	—0,00129	6,9	—0,00013
2,50	—0,02491	3,50	—0,00697	5,0	—0,00115	7,0	—0,000116
2,55	—0,02333	3,55	—0,00655	5,1	—0,00102	7,1	—0,000103
2,60	—0,02185	3,60	—0,00616	5,2	—0,00091	7,2	—0,000092
2,65	—0,02047	3,65	—0,00579	5,3	—0,00081	7,3	—9,000082
2,70	—0,01918	3,70	—0,00545	5,4	—0,00072	7,4	—0,000074
2,75	—0,01798	3,75	—0,00512	5,5	—0,00064	7,5	—0,000066
2,80	—0,01686	3,80	—0,00482	5,6	—0,00057	7,6	—0,000059
2,85	—0,01581	3,85	—0,00454	5,7	—0,00051	7,7	—0,000053
2,90	—0,01482	3,90	—0,00427	5,8	—0,00045	7,8	—0,000047
2,95	—0,01391	3,95	—0,00402	5,9	—0,00040	7,9	—0,000042
3,00	—0,01305	4,00	—0,00378	6,0	—0,00036	8,0	—0,000038

Примѣръ $li\, e^{-3{,}95} = -0{,}00402$.

Таблица величинъ $li\,e^x$ и значеній e^x.

x	e^x	$li\,e^x$	x	e^x	$li\,e^x$
1,0	2,72	1,895	3,8	44,70	17,095
1,1	3,00	2,167	3,9	49,40	18,316
1,2	3,32	2,442	4,0	54,60	19,631
1,3	3,67	2,721	4,1	60,34	21,048
1,4	4,06	3,007	4,2	66,69	22,577
1,5	4,48	3,301	4,3	73,70	24,227
1,6	4,95	3,605	4,4	81,45	26,009
1,7	5,47	3,921	4,5	90,02	27,934
1,8	6,05	4,250	4,6	99,48	30,014
1,9	6,69	4,594	4,7	109,95	32,264
2,0	7,39	4,954	4,8	121,51	34,698
2,1	8,17	5,333	4,9	134,29	37,332
2,2	9,03	5,733	5,0	148,41	40,185
2,3	9,97	6,154	5,1	164,02	43,276
2,4	11,02	6,601	5,2	181,27	46,625
2,5	12,18	7,074	5,3	200,34	50,256
2,6	13,46	7,576	5,4	221,41	54,193
2,7	14,88	8,110	5,5	244,69	58,466
2,8	16,44	8,679	5,6	270,43	63,102
2,9	18,17	9,286	5,7	298,87	68,135
3,0	20,09	9,934	5,8	330,30	73,601
3,1	22,20	10,626	5,9	365,04	79,538
3,2	24,53	11,367	6,0	403,4	85,990
3,3	27,11	12,161	6,1	445,9	93,002
3,4	29,96	13,012	6,2	492,7	100,626
3,5	33,12	13,925	6,3	544,6	108,916
3,6	36,60	14,906	6,4	601,8	117,935
3,7	40,45	15,961	6,5	665,1	127,747

x	e^x	$li\, e^x$
6,6	735,1	138,426
6,7	812,4	150,050
6,8	897,8	162,707
6,9	992,3	176,491
7,0	1096,6	191,50
7,1	1212,0	207,86
7,2	1339,4	225,69
7,3	1480,3	245,12
7,4	1636,0	266,30
7,5	1808,0	289,39
7,6	1998,2	314,57
7,7	2208,3	342,04
7,8	2440,6	372,01
7,9	2697,3	404,70
8,0	2981,0	440,38
8,1	3294,5	479,32
8,2	3640,9	521,83
8,3	4023,9	568,24
8,4	4447,1	618,92
8,5	4914,8	674,26
8,6	5431,7	734,71
8,7	6002,9	800,75
8,8	6634,2	872,89
8,9	7332,0	951,73
9,0	8103,1	1037,88
9,1	8955,3	1132,04
9,2	9897,1	1234,96
9,3	10938,0	1347,48
9,4	12088,4	1470,51
9,5	13359,7	1605,02
9,6	14764,8	1752,14
9,7	16317,6	1913,05
9,8	18033,7	2089,05
9,9	19930,4	2281,58
10,0	22026,5	2492,23
10,1	24343,0	2722,71
10,2	26903,2	2974,93
10,3	29732,6	3250,85
10,4	32859,6	3553,06
10,5	36315,5	3883,74
10,6	40134,8	4245,73
10,7	44355,9	4642,04
10,8	49020,8	5075,96
10,9	54176,4	5551,10
11,0	59874,1	6071,41
11,1	66171,2	6641,23
11,2	73130,4	7265,34
11,3	80821,6	7948,96
11,4	89321,7	8697,81
11,5	98715,8	9518,20
11,6	109098	10417
11,8	133252	12481
12,0	162755	14960
12,2	198789	17937
12,4	242802	21514
12,6	296559	25814
12,8	362217	30982
13,0	442413	37198
13,2	540365	44673
13,4	660003	53666
13,6	806130	64488
13,8	984609	77513
14,0	1202604	93193
14,2	1468864	112072
14,4	1794075	134809
14,6	2191288	162197
14,8	2676445	195194
15,0	3269017	234956
15,2	3992787	282878
15,4	4876801	340645
15,6	5956538	410291
15,8	7275332	494274
16,0	8886111	595561
16,2	10853520	717737
16,4	13256519	865132
16,6	16191549	1042978
16,8	19776403	1257600
17,0	24154953	1516638

x	e^x	$li\ e^x$	x	e^x	$li\ e^x$
17,2	29502926	1829328	18,8	146128949	8239375
17,4	36034955	2206833	19,0	178482301	9950907
17,6	44013194	2662650	19,2	217998775	12019491
17,8	53757836	3213098	19,4	266264305	14519886
18,0	65659969	3877904	19,6	325215956	17542558
18,2	80197267	4680930	19,8	397219666	21196982
18,4	97953164	5651031	20,0	485165195	25615653
18,6	119640264	6823107			

ЗАМѢТКА

ОБЪ ОДНОЙ ФОРМУЛѢ ОТНОСЯЩЕЙСЯ

КЪ ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ.

академика **В. Я. БУНЯКОВСКАГО.**

Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія Императорской Академіи Наукъ 2 Декабря 1886 года.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ LV-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМПЕР. АКАДЕМІИ НАУКЪ.
№ 5.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1887.

ПРОДАЕТСЯ У КОМИССІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

И. Глазунова, въ С. П. Б. **Эггерса, и Комп.,** въ С. П. Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.

Цѣна 10 коп.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
С.-Петербургъ, Мартъ 1887 года.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій.*

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр. 9 лин., № 12.

ЗАМѢТКА ОБЪ ОДНОЙ ФОРМУЛѢ ОТНОСЯЩЕЙСЯ КЪ ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ.

Въ этой замѣткѣ я привожу одну формулу, служащую для перехода отъ произвольнаго ряда цѣлыхъ положительныхъ чиселъ къ другому ряду, связанному съ первымъ извѣстнымъ аналитическимъ условіемъ. Формула эта, при посредствѣ которой рѣшаются единообразнымъ пріёмомъ многіе вопросы, встрѣчающіеся въ Теоріи Чиселъ, выводится очень просто слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ A какое ни есть число цѣлое положительное, а p число безразлично *простое* или *сложное*. Выразимъ число A по системѣ счисленія p, и въ этомъ новомъ видѣ изобразимъ его знакоположеніемъ $(A)_p$, а *сумму цифръ*, изъ которыхъ оно состоитъ, означимъ чрезъ $S(A)_p$. Такъ, напримѣръ, при $A = 83$, $p = 19$, имѣемъ

$$(83)_{19} = 4\,(7), \;\; S(83)_{19} = 4 + 7 = 11.$$

Первая изъ этихъ цифръ 4 означаетъ *цѣлое частное* $E\left(\frac{83}{19}\right)$, а вторая 7 *остатокъ*. Еслибъ, при томъ же значеніи $p = 19$, имѣли $A = 245$, то получили бы

цѣлое частное $E\left(\frac{245}{19}\right) = 12$, а *остатокъ* $= 17$, такъ что $(245)_{19} = (12)\,(17)$, и слѣдовательно

$$S(245)_{19} = 12 + 17 = 29;$$

правильность такого пріёма сложенія цифръ явствуетъ изъ того, что каждая изъ двухъ *составныхъ цифръ* 12 и 17, какъ и должно быть, *менѣе* 19, то есть *менѣе основанія*, употребленной въ настоящемъ случаѣ системы нумераціи.

Условясь въ этихъ обозначеніяхъ, докажемъ слѣдующее Предложеніе:

Разность между даннымъ числомъ A и суммою $S(A)_p$ цифръ этого числа, выраженнаго по системѣ нумераціи при основаніи p, раздѣленная на $p-1$, равна *цѣлому частному* $E\left(\frac{A}{p}\right)$, такъ что имѣемъ

$$E\left(\frac{A}{p}\right)=\frac{A-S(A)_p}{p-1}, \text{ а также } S(A)_p=A-(p-1)\,E\left(\frac{A}{p}\right)\ldots(1)$$

Доказательство этого Предложенія очень просто; дѣйствительно, изобразимъ чрезъ r остатокъ дѣленія A на p, и напишемъ равенство

$$\frac{A}{p}=E\left(\frac{A}{p}\right)+\frac{r}{p}$$

въ видѣ

$$A=pE\left(\frac{A}{p}\right)+r, \text{ или } A=(p-1)\,E\left(\frac{A}{p}\right)+E\left(\frac{A}{p}\right)+r;$$

замѣтимъ теперь, что, по причинѣ $r<p$, сумма $E\left(\frac{A}{p}\right)+r$, читаемая по десятичной нумераціи, изображаетъ сумму цифръ числа A, выраженнаго по системѣ нумераціи p; поэтому будетъ

$$E\left(\frac{A}{p}\right)+r=S(A)_p,$$

въ слѣдствіе чего предшествующее равенство приведетъ непосредственно къ форм. (1). Такъ, напримѣръ, для $A=497$, $p=43$, $E\left(\frac{497}{43}\right)=11$, $r=24$, получимъ

$$S(497)_{43}=497-42\times 11=35,$$

а также и на-оборотъ

$$E\left(\frac{497}{43}\right)=\frac{497-35}{42}=11.$$

Для удобства нѣкоторыхъ приложеній форм. (1) обобщимъ её. Пусть будетъ $A=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$, гдѣ $a_1, a_2, a_3\ldots$ означаютъ цѣлыя положительныя числа, опредѣляемыя условіями рѣшаемой задачи. Ясно, что для каждаго числа a_λ этого ряда, формула (1) будетъ имѣть мѣсто, такъ что вообще

$$E\left(\frac{a_\lambda}{p}\right)=\frac{a_\lambda-S(a_\lambda)_p}{p-1}.$$

Взявъ сумму подобныхъ равенствъ для всѣхъ цѣлыхъ значеній λ отъ $\lambda=1$ до $\lambda=n$, получимъ слѣдующую общую формулу:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}E\left(\frac{a_\lambda}{p}\right)=\frac{A-\sum\limits_1^n S(a_\lambda)_p}{p-1},$$

или равнозначущую съ нею ......(2)

$$\sum_1^n S(a_\lambda)_p=A-(p-1)\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}E\left(\frac{a_\lambda}{p}\right).$$

Переходя къ приложеніямъ форм. (1) и (2) укажу сперва на примѣненіе первой изъ нихъ къ опредѣленію состава чиселъ въ отношеніи кратности ихъ *простыхъ дѣлителей*. Начну съ факторіальной функціи $1.2.3\ldots a$. Для опредѣленія степени m кратности простаго числа p, входящаго въ это произведеніе, имѣемъ формулу

$$1.2.3\ldots a=p^m.Q,\ m=\frac{a-S(a)_p}{p-1},\ \ldots\ldots(3)$$

гдѣ Q цѣлое число не дѣлящееся на p. Такъ, напримѣръ, еслибъ желали опредѣлить совокупность множителей 3, входящихъ въ составъ произведенія $1.2.3\ldots 100$, то имѣя

$$a=100,\ (a)_3=10201,\ S(a)_3=1+2+1=4,$$

получили бы по форм. (1)

$$m=\frac{100-4}{2}=48.$$

Въ случаѣ $a=p^n$ имѣемъ просто

$$m=\frac{p^n-1}{p-1};$$

и дѣйствительно ясно, что

$$S(a)_p=S(p^n)_p=1,$$

такъ какъ p^n, при системѣ нумераціи p, выражается *единицею*, сопровождаемою n *нулями*.

Замѣтимъ еще, что форм. (1) справедлива и при p *сложномъ*; положимъ, напримѣръ, $a=100$ какъ выше, а $p=2.3=6$. Получимъ

$$(100)_6=244,\ S(100)_6=2+4+4=10,$$

и слѣдовательно

$$m=\frac{100-10}{5}=18;$$

и такъ, 6 входитъ множителемъ въ $1.2.3\ldots 100$ *восемнадцать* разъ; простое вычисленіе покажетъ, что, изъ этихъ 100 чиселъ, 14 дѣлятся просто на 6, а 2 числа, именно 36 и 72, на 6^2.

Если изобразимъ чрезъ p наибольшее *простое число*, пред-

шествующее a, то на основаніи форм. (3), получимъ такое разложеніе:

$$1.2.3\ldots a =$$

$$2^{a-S(a)_2}.3^{\frac{a-S(a)_3}{2}}.5^{\frac{a-S(a)_5}{4}}\ldots p^{\frac{a-S(a)_p}{p-1}}, \ldots\ldots (4)$$

при чемъ показатель $\frac{a-S(a)_p}{p-1}$ послѣдняго множителя очевидно будетъ равенъ *единицѣ*.

Формула (1) примѣнима также къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій $1^{ой}$ степени; но въ практическомъ отношеніи она не представляетъ преимущества предъ общеупотребляемыми пріёмами. Возьмемъ для примѣра уравненіе

$$127x - 56y = 1,$$

для рѣшенія котораго беремъ вторую изъ формулъ (1). Опредѣлимъ сумму цифръ числа 127 по системѣ нумераціи 57, то есть по числу равному коэффиціенту y, увеличенному *единицею*; такъ будемъ поступать и въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ. Получимъ

$$S(127)_{57} = 127 - 2.56 = 2(13) = 15,$$

послѣ чего данное уравненіе пишемъ въ видѣ

$$15x - 56(y - 2x) = 1;$$

положивъ въ немъ

$$y - 2x = y',$$

получится первое преобразованное уравненіе

$$56y' - 15x = -1.$$

Поступаемъ съ нимъ какъ съ первоначальнымъ; найдемъ

$$S(56)_{16} = 56 - 3.15 = 3(8) = 11,$$

и составляемъ новое уравненіе

$$11y' + 3.15y' - 15x = -1,$$

приводящее къ равенству

$$15(x - 3y') - 11y' = 1,$$

которое, при положеніи въ немъ

$$x - 3y' = x',$$

обратится въ слѣдующее:

$$15x' - 11y' = 1.$$

Наконецъ имѣемъ

$$S(15)_{12} = 15 - 1.11 = 1(3) = 4,$$

а поэтому будетъ

$$4x' - 11(y' - x') = 1.$$

Такъ какъ рѣшенія этого уравненія очевидны, именно

$$x' = 3,\ y' - x' = 1,\ \text{откуда}\ y' = 4,$$

то не продолжаемъ вычисленія; внеся эти величины въ выше найденныя равенства

$$y - 2x = y' \text{ и } x - 3y' = x',$$

получимъ окончательно

$$x = 15, \quad y = 34.$$

По простотѣ употребленныхъ пріёмовъ дальнѣйшія подробности были бы излишни.

Переходимъ теперь къ нѣкоторымъ приложеніямъ формулы (2), служащей для перехода отъ ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

къ ряду

$$E\left(\frac{a_1}{p}\right) + E\left(\frac{a_2}{p}\right) + E\left(\frac{a_3}{p}\right) + \ldots + E\left(\frac{a_n}{p}\right) \ldots\ldots (6)$$

разумѣя подъ p какое ни есть цѣлое число.

Начнемъ съ примѣненія форм. (2) къ вычисленію суммы *квадратичныхъ вычетовъ* простыхъ чиселъ. Пусть будетъ p данное *простое число*, а R искомая сумма; по самому свойству рѣшаемой нами задачи, рядъ (5) будетъ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \lambda^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2-1}{24} \cdot p,$$

а рядъ (6), слѣдующій:

$$E\left(\frac{1^2}{p}\right) + E\left(\frac{2^2}{p}\right) + E\left(\frac{3^2}{p}\right) + \ldots + E\left(\frac{\lambda^2}{p}\right) + \ldots + E\left(\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}{p}\right).$$

Самая же форм. (2), въ настоящемъ случаѣ, приметъ видъ

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{\lambda^2}{p}\right) = \frac{\frac{p^2-1}{24} \cdot p - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-1}{2}} S(\lambda^2)_p}{p-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Первая часть этой формулы изображаетъ сумму послѣдовательныхъ *цѣлыхъ частныхъ*, полученнныхъ при раздѣленіи на p каждаго изъ $\frac{p-1}{2}$ квадратовъ отъ 1^2 до $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ включительно; означимъ, для краткости, чрезъ Q эту сумму. Если прибавимъ къ ней величину $\frac{R}{p}$, именно сумму R квадратичныхъ вычетовъ, раздѣленную на p, то получимъ равенство

$$Q + \frac{R}{p} = E\left(\frac{\frac{p^2-1}{24} \cdot p}{p}\right) = \frac{p^2-1}{24},$$

или

$$\frac{R}{p}=\frac{p^2-1}{24}-Q,$$

изъ котораго выводимъ слѣдующія соотношенія между Q и R:

$$\left.\begin{aligned} Q&=\frac{p^2-1}{24}-\frac{R}{p}\\ R&=\left(\frac{p^2-1}{24}-Q\right)p\\ Q+R&=\frac{p^2-1}{24}p-(p-1)Q=\frac{p^2-1}{24}+(p-1)\frac{R}{p}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Сопоставленіе послѣднихъ двухъ равенствъ съ форм. (2), или съ обращенною (7), приводитъ къ результату

$$Q+R=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-1}{2}} S(\lambda^2)_p, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

вытекающему также и изъ самаго вида и значеній чиселъ $S(\lambda^2)_p$, стоящихъ подъ знакомъ

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-1}{2}} S.$$

Для численнаго примѣра возьмемъ простое число 23 вида $4k+3$. Первые $\frac{23-1}{2}=11$ квадратовъ изобразимъ по системѣ нумераціи, основаніе которой равно числу 23; получатся слѣдующіе результаты *):

$$\left.\begin{array}{c} 1^2=1,\ 2^2=4,\ 3^2=9,\ 4^2=16\\ 5^2=1\,(2),\ 6^2=1\,(13),\ 7^2=2\,(3),\ 8^2=2\,(18),\\ 9^2=3\,(12),\ 10^2=4\,(8),\ 11^2=5\,(6). \end{array}\right\} \quad (10)$$

---

*) Для избѣжанія нѣкоторой сбивчивости, которая произошла бы въ случаѣ употребленія особыхъ знаковъ для остатковъ 10, 11, 12, до 22, мы, какъ выше, заключили въ скобки эти числа, написавъ ихъ по десятичной системѣ.

Составивъ отдѣльно суммы *послѣдовательныхъ цѣлыхъ частныхъ* 1, 1, 2... и т. д. до 5, а также *остатковъ* 1, 4, 9, 16 и (2), (13), (3) и т. д. до (6), получимъ

$$Q=18,\ R=92=4.23,\ \frac{R}{23}=4,\ \frac{p^2-1}{24}=22,\ Q+R=110,$$

удовлетворяющія, какъ и слѣдуетъ, форм. (7), (8) и (9).

По найденной суммѣ R *квадратичныхъ вычетовъ* простаго числа p, прямо опредѣлится и сумма R' его *неквадратичныхъ вычетовъ*, равная какъ извѣстно, разности $\frac{p-1}{2}.p-R$; такъ для $p=23$, будетъ $R'=11.23-92=161=7.23$.

Такъ какъ для простаго числа вида $p=4k+1$ имѣемъ $R=R'=\frac{p-1}{4}\cdot p$, то для него и значеніе Q опредѣлится непосредственно первою изъ форм. (8), которая приведетъ къ равенству

$$Q=\frac{p^2-1}{24}-\frac{R}{p}=\frac{p^2-1}{24}-\frac{p-1}{4}=\frac{(p-1)(p-5)}{24}.$$

Подобнымъ образомъ опредѣлится и *сумма цифръ числа* $\frac{p^2-1}{24}\cdot p$, выраженнаго по системѣ нумераціи при основаніи p; эта сумма, въ силу форм. (9), будетъ

$$Q+R=\frac{(p-1)(p-5)}{24}+\frac{p-1}{4}\cdot p=\frac{(p-1)(7p-5)}{24}.$$

Такъ для простаго числа $p=4.4+1=17$, получимъ результаты

$$Q=8,\ R=R'=68,\ Q+R=76,$$

легко повѣряемые прямымъ вычисленіемъ.

Сказанное предъ симъ относилось къ квадратичнымъ вычетамъ *простыхъ* чиселъ; разсмотримъ теперь, что произойдетъ въ томъ случаѣ, когда будемъ имѣть совокупность подобныхъ же вычетовъ не для *простаго*, извѣстнаго числа p, а для такого *нечётнаго числа* N, о которомъ мы не знаемъ *простое*-ли оно, или

сложное. Рѣшеніе этого вопроса, при значительномъ N, сопряжено съ выполненіемъ не менѣе чѣмъ для *простаго числа* утомительныхъ по длиннотѣ ариѳметическихъ вычисленій, хотя въ сущности и весьма простыхъ, но требующихъ много времени и напряженнаго вниманія. Начинаемъ, какъ и выше, съ того, что вычисляемъ рядъ квадратичныхъ вычетовъ числа N. Тщательное разсмотрѣніе членовъ полученнаго ряда вычетовъ приведетъ, какъ увидимъ ниже, къ несомнѣнному заключенію о томъ, будетъ-ли испытуемое число N *простое* или *сложное*; во второмъ случаѣ, самое разложеніе N на его *простые дѣлители* не представитъ никакого затрудненія.

Такъ какъ число N *нечётное*, то оно будетъ вида $4k+1$ или $4k+3$; въ обоихъ случаяхъ имѣютъ мѣсто слѣдующіе признаки: Если въ ряду найденныхъ $\frac{N-1}{2}$ вычетовъ, всѣ они различны между собой, и не одинъ изъ нихъ не равенъ *нулю*, то N несомнѣнно будетъ числомъ *простымъ*. Напротивъ того N будетъ *сложнымъ*, когда этотъ рядъ не удовлетворитъ хотя одному изъ этихъ двухъ условій. Есть и нѣкоторые другіе признаки *разложимости* числа N: таковы напримѣръ тѣ, которые основаны на неравенствѣ числу N суммы двухъ сопряженныхъ квадратичныхъ вычетовъ при $N=4k+1$ и паръ, при $p=4k+3$, составленныхъ изъ одного квадратичнаго вычета и сопряженнаго съ нимъ вычета неквадратичнаго; существованіе вычета, квадратичнаго или неквадратичнаго, имѣющаго общаго дѣлителя съ числомъ N, послужитъ также явнымъ признакомъ разложимости сего послѣдняго.

Пояснимъ сказанное самыми простыми численными примѣрами. Такъ для $N=4.2+1=9$ получимъ слѣдующіе ряды:

квадраты	1^2	2^2	3^2	4^2,
квадр. вычеты	1	4	1 (0)	1 (7);

въ числѣ вычетовъ находимъ *нуль*, соотвѣтствующій квадрату 3^2, равному *сложному* числу $N=9$. На *разложимость* 9 указываютъ и другіе вышеприведенные признаки. Ясно, что и вообще,

когда N будетъ точнымъ квадратомъ, то между его квадратичными вычетами всегда окажется *нуль*.

Возьмемъ примѣръ для числа вида $4k+3$; положимъ $N=4.3+3=15$, для котораго получимъ слѣдующія ряды:

квадраты	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2
квадр. вычеты . .	1*	4**	9	1(1)*	1(10)	2(6)	3(4)**.

Въ этомъ ряду вычетовъ усматриваемъ двѣ повторяющіяся цифры 1* и 4**, входящія каждая по два раза; это самое обнаруживаетъ сложность числа $15=3.5$. Самый пріёмъ для разложенія сложнаго числа N на его дѣлителей мы приложимъ къ числу 21, представляющему болѣе разнообразія чѣмъ 15 по кратности появленія равныхъ между собой вычетовъ. Выписываю рядъ квадратовъ съ результатами дѣленія каждаго изъ нихъ на 21:

$$\left.\begin{array}{l} 1^2=1^*,\ 2^2=4^{**},\ 3^2=9,\ 4^2=16^{***},\ 5^2=1\,(4)^{**} \\ 6^2=1\,(15),\ 7^2=2\,(7),\ 8^2=3\,(1)^*,\ 9^2=3\,(18),\ 10^2=4\,(16)^{***}. \end{array}\right\}\ (11)$$

Въ этомъ ряду повторяющихся численныхъ значеній вычетовъ находимъ три пары, а именно:

$$1^* \text{ и } 3\,(1)^*,\quad 4^{**} \text{ и } 1\,(4)^{**},\quad 16^{***} \text{ и } 4\,(16)^{***}.$$

Если положимъ теперь $21=pq$, разумѣя подъ p и q дѣлителей 21, то, на основаніи результатовъ (11), получимъ слѣдующія три равенства:

$$1^0)\ 3\,(1)^* - 1^* = 3\,pq = 8^2-1^2=(8+1)(8-1)=9.7,$$

откуда $pq=3.7$. Къ тому же результату приводятъ и остальныя два равенства; дѣйствительно имѣемъ:

$$2^0)\ 1\,(4)^{**}-(4)^{**}=pq=5^2-2^2=3.7;$$

$$3^0)\ 4\,(16)^{***}-(16)^{***}=4pq=10^2-4^2,$$

и слѣдовательно

$$pq = 5^2 - 2^2 = 3 . 7 .$$

Когда число N будетъ разложено на два множителя p и q, то каждый изъ нихъ, въ свою очередь, можетъ быть подвергнутъ такому же испытанію какъ сейчасъ показано въ отношеніи къ числу N.

Приведенные здѣсь признаки для отличенія *простаго* числа отъ *сложнаго*, съ перваго взгляда могли бы инымъ показаться довольно простыми; на самомъ же дѣлѣ для рѣшенія вопроса при значительной величинѣ испытуемаго числа N, потребуются какъ уже замѣчено выше, многочисленныя ариѳметическія выкладки, утомительныя по огромному количеству чиселъ, которыя должно расположить въ возрастающемъ порядкѣ ихъ величинъ, и потомъ сопоставить одни съ другими; такой трудъ на практикѣ окажется почти неисполнимымъ. Только при рѣдкой случайности могутъ встрѣтиться *равные вычеты* или *нуль*, или другіе признаки, рѣшающіе вопросъ о разложимости испытуемаго числа.

Приложимъ еще форм. (2) къ вычисленію *Лежандрова символа* $\left(\frac{a}{p}\right)$, гдѣ подъ p разумѣемъ число *простое*, а подъ a произвольное цѣлое число, не дѣлящееся на p. По одной изъ извѣстныхъ теоремъ, относящихся къ этому символу, имѣемъ *):

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{E\left(\frac{2a}{p}\right) + E\left(\frac{4a}{p}\right) + E\left(\frac{6a}{p}\right) + \ldots + E\left(\frac{\overline{p-1}.a}{p}\right)} . \quad \mathbf{(12)}$$

Для приложенія форм. (2) къ этому равенству примемъ въ разсмотрѣніе рядъ

$$2a + 4a + 6a + \ldots + (p-1)a = \frac{p^2-1}{4} . a ,$$

---

*) См. *Теорію сравненій*; соч. *П. Чебышева*; С.-Петербургъ, 1849 г. стр. 71.

составленный изъ числителей ряда, входящаго показателемъ во вторую часть форм. (12); если, для сокращенія письма, изобразимъ чрезъ δ этотъ показатель, то очевидно получимъ

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\delta}=(-1)^{\dfrac{\frac{p^2-1}{4}\,.\,a-\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-1}{2}} S(2\lambda a)_p}{p-1}},$$

и слѣдовательно будетъ:

$$\text{при } \delta \textit{ чётномъ}\ldots.\ \left(\frac{a}{p}\right)=+1.$$

$$\text{при } \delta \textit{ нечётномъ}\,.\,.\ \left(\frac{a}{p}\right)=-1.$$

Вотъ простые численные примѣры для обоихъ случаевъ:

Для опредѣленія знака символа $\left(\frac{7}{11}\right)$, въ которомъ $p=11$, $a=7$, получаемъ результаты:

$$2.7+4.7+6.7+8.7+10.7=210;$$

этимъ произведеніямъ соотвѣтствуютъ по порядку слѣдующіе ряды *цѣлыхъ частныхъ* и *остатковъ*, выраженныхъ по системѣ нумераціи 11:

$$1\,(3),\ \ 2\,(6),\ \ 3\,(9),\ \ 5\,(1),\ \ 6\,(4);$$

сложивъ цѣлыя частныя, получимъ

$$\delta=1+2+3+5+6=17,$$

и слѣдовательно

$$\left(\frac{7}{11}\right)=(-1)^{17}=-1.$$

Этотъ самый результатъ найдется и по общей формулѣ; дѣйствительно сумма *цѣлыхъ частныхъ* и *остатковъ*, при основаніи 11 нумераціи, равна 40; слѣдовательно

$$\delta=\frac{210-40}{10}=17.$$

Опредѣлимъ еще величину символа $\left(\frac{3}{13}\right)$; найдемъ послѣдовательно:

$$2.3 + 4.3 + 6.3 + 8.3 + 10.3 + 12.3 = 126.$$

Почленныя выраженія этихъ шести членовъ, по системѣ нумераціи 13, будутъ

$$6,\ 12,\ 1(5),\ 1(11),\ 2(4),\ 2(10),$$

а общая сумма цифръ этихъ чиселъ 54, именно: сумма *остатковъ* 48 и сумма *цѣлыхъ частныхъ* $6 = \delta$, какъ и слѣдуетъ изъ формулы

$$\delta = \frac{126 - 54}{12} = 6,$$

почему и будетъ

$$\left(\frac{3}{13}\right) = (-1)^6 = +1.$$

На основаніи форм. (12) выраженія для символа $\left(\frac{a}{p}\right)$, при малыхъ величинахъ аргумента a, могутъ быть приведены къ болѣе упрощенному виду; напримѣръ, для $a = 2$, показатель, входящій во вторую часть форм. (12), именно

$$\delta = E\left(\frac{4}{p}\right) + E\left(\frac{8}{p}\right) + E\left(\frac{12}{p}\right) + \ldots + E\left(\frac{4k}{p}\right) + \ldots + E\left(\frac{4 \cdot \frac{p-1}{2}}{p}\right) . \quad (13)$$

приводится просто къ $E\left(\frac{p+1}{4}\right)$, такъ что для всякаго простаго числа p имѣемъ формулу

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\delta} = (-1)^{E\left(\frac{p+1}{4}\right)}, \ldots\ldots\ldots (14)$$

равнозначущую съ общеизвѣстною

$$\left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Докажемъ Предложеніе (14) сперва для простаго числа $p = 4n + 1$. При первомъ взглядѣ на рядъ (13) усматриваемъ,

что члены его могутъ только равняться *нулю* или *единицѣ*; пусть будетъ k нумеръ послѣдняго изъ первыхъ его членовъ равныхъ *нулю*; для опредѣленія k имѣемъ очевидное неравенство

$$\frac{4k}{p} < 1, \text{ откуда } k = E\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p-1}{4},$$

показывающее, что число членовъ равныхъ *нулю* есть $\frac{p-1}{4}$.

Каждый изъ остальныхъ членовъ, включительно до послѣдняго $E\left(\frac{4.\frac{p-1}{2}}{p}\right)$ равенъ *единицѣ*, что̀ видно изъ неравенства

$$\frac{4.\frac{p-1}{2}}{p} = 2 - \frac{2}{p} < 2, \text{ откуда } E\left(\frac{4.\frac{p-1}{2}}{p}\right) = 1.$$

Если изъ полнаго числа $\frac{p-1}{2}$ членовъ ряда (12) вычтемъ найденное предъ симъ число $\frac{p-1}{4}$ членовъ равныхъ *нулю*, то получимъ искомую величину δ, именно

$$\delta = \frac{p-1}{2} - \frac{p-1}{4} = \frac{p-1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{15})$$

Совершенно подобнымъ образомъ для простаго числа $p = 4n + 3$ найдемъ слѣдующіе результаты:

Число членовъ равныхъ *нулю* въ ряду (13) опредѣлится неравенствомъ

$$\frac{4k}{p} < 1, \text{ откуда } k = E\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p-3}{4}.$$

Вычтя $\frac{p-3}{4}$ изъ $\frac{p-1}{2}$, получимъ δ, то есть число членовъ равныхъ *единицѣ*; слѣдовательно

$$\delta = \frac{p-1}{2} - \frac{p-3}{4} = \frac{p+1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathbf{16})$$

И такъ, для простыхъ чиселъ вида $4n+1$ имѣемъ $\delta = \frac{p-1}{4} = n$, а для чиселъ вида $4n+3$, $\delta = \frac{p+1}{4} = n+1$;

сложное. Рѣшеніе этого вопроса, при значительномъ N, сопряжено съ выполненіемъ не менѣе чѣмъ для *простаго числа* утомительныхъ по длиннотѣ ариѳметическихъ вычисленій, хотя въ сущности и весьма простыхъ, но требующихъ много времени и напряженнаго вниманія. Начинаемъ, какъ и выше, съ того, что вычисляемъ рядъ квадратичныхъ вычетовъ числа N. Тщательное разсмотрѣніе членовъ полученнаго ряда вычетовъ приведетъ, какъ увидимъ ниже, къ несомнѣнному заключенію о томъ, будетъ-ли испытуемое число N *простое* или *сложное*; во второмъ случаѣ, самое разложеніе N на его *простые дѣлители* не представитъ никакого затрудненія.

Такъ какъ число N *нечётное*, то оно будетъ вида $4k+1$ или $4k+3$; въ обоихъ случаяхъ имѣютъ мѣсто слѣдующіе признаки: Если въ ряду найденныхъ $\frac{N-1}{2}$ вычетовъ, всѣ они различны между собой, и не одинъ изъ нихъ не равенъ *нулю*, то N несомнѣнно будетъ числомъ *простымъ*. Напротивъ того N будетъ *сложнымъ*, когда этотъ рядъ не удовлетворитъ хотя одному изъ этихъ двухъ условій. Есть и нѣкоторые другіе признаки *разложимости* числа N: таковы напримѣръ тѣ, которые основаны на неравенствѣ числу N суммы двухъ сопряженныхъ квадратичныхъ вычетовъ при $N=4k+1$ и паръ, при $p=4k+3$, составленныхъ изъ одного квадратичнаго вычета и сопряженнаго съ нимъ вычета неквадратичнаго; существованіе вычета, квадратичнаго или неквадратичнаго, имѣющаго общаго дѣлителя съ числомъ N, послужитъ также явнымъ признакомъ разложимости сего послѣдняго.

Пояснимъ сказанное самыми простыми численными примѣрами. Такъ для $N=4.2+1=9$ получимъ слѣдующіе ряды:

квадраты........	1^2	2^2	3^2	4^2,
квадр. вычеты....	1	4	1 (0)	1 (7);

въ числѣ вычетовъ находимъ *нуль*, соотвѣтствующій квадрату 3^2, равному *сложному* числу $N=9$. На *разложимость* 9 указываютъ и другіе вышеприведенные признаки. Ясно, что и вообще,

Николай Сенигов,
учитель Математики, чистой и прикладной.

НОВООТКРЫТЫЙ

ЗАКОНЪ ПРИРАЩЕНІЙ

ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Отдѣльно напечатанная статья второго выпуска, издаваемаго **Н. Сениговымъ** сочиненія подъ заглавіемъ: „Опытъ усовершенствованія элементовъ математики“.

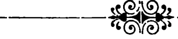
МОСКВА.
1893.



Николай Сениговъ,
учитель Математики, чистой и прикладной.

НОВООТКРЫТЫЙ
ЗАКОНЪ ПРИРАЩЕНІЙ
ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Отдѣльно напечатанная статья ВТОРОГО ВЫПУСКА, издаваемаго **Н. Сениговымъ** сочиненія подъ заглавіемъ: „ОПЫТЪ УСОВЕРШЕНСТВОВАНІЯ ЭЛЕМЕНТОВЪ МАТЕМАТИКИ“.



МОСКВА.
Типо-литографія Г. С. Ламакина, Варварка, д. бр. Максимовыхъ.
1893.

Дозволено цензурою. Москва, 10 апрѣля 1893 г.

НОВООТКРЫТЫЙ
ЗАКОНЪ ПРИРАЩЕНІЙ
ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

„Особенно примѣчанія достойно то, что, когда *простыя числа* написаны будутъ по порядку, какъ одно за другимъ слѣдуетъ, а именно

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47 и. т. д. ,

то въ нихъ никакого правильнаго порядка не примѣчается: приращенія ихъ суть то больше, то меньше; и до сихъ поръ еще не могли открыть, слѣдуютъ ли сіи приращенія какому нибудь закону или нѣтъ“.

Таково мнѣніе *Эйлера*, выраженное имъ въ его „**Основаніяхъ алгебры**“ (С.-Пб. 1812 г. стр. 23—24), и переводчикъ этой книги экстраординарный академикъ *В. Висковатовъ* къ этому заключенію никакого присовокупленія съ своей стороны не дѣлаетъ, между тѣмъ какъ его переводъ обиленъ полезными и нерѣдко обширными примѣчаніями, относящимися къ болѣе или менѣе важнымъ алгебраическимъ теоріямъ, недостаточно развитымъ знаменитымъ авторомъ этой книги. И въ позднѣйшихъ изданіяхъ Алгебры Эйлера на иностранныхъ языкахъ, насколько намъ извѣстно, комментарій къ этому заключенію не имѣется.

И до сихъ поръ въ курсахъ теоріи чиселъ ограничиваются только указаніемъ на несостоятельность попытокъ открыть законъ простыхъ чиселъ, о которомъ идетъ рѣчь.

Съ этою цѣлью приводится прежде всего формула

$$2^{2^x}+1 ,$$

дающая дѣйствительно нѣсколько простыхъ чиселъ, полагая въ

но при этомъ замѣтимъ, что первое изъ нихъ $\frac{p-1}{4}=n$ форм. (15), можетъ быть представлена и въ видѣ $E\left(\frac{p+1}{4}\right)$, относящемся къ простому числу $4n+3$; это прямо видно изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$E\left(\frac{p+1}{4}\right)=E\left(\frac{4n+2}{4}\right)=n=\frac{p-1}{4}.$$

И такъ, согласно съ форм. (14), въ обоихъ случаяхъ имѣемъ $\delta=E\left(\frac{p+1}{4}\right)$.

На основаніи общей форм. (12) легко доказать, что для $a=3$, получимъ

$$\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\delta}=(-1)^{E\left(\frac{p+1}{6}\right)}.$$

Этотъ послѣдній результатъ, также два слѣдующіе

$$\left(\frac{5}{p}\right)=(-1)^{E\left(\frac{p+2}{5}\right)},\quad \left(\frac{6}{p}\right)=(-1)^{E\left(\frac{p+5}{12}\right)}$$

и еще нѣсколько подобныхъ, доказаны другимъ путемъ въ моей статьѣ: *Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique E(x); Article 4ième.* (Bulletin de l'Acad. Imp. des Sciences de St.-Pétersbourg; T. XIV).

Я конечно, не придаю особаго значенія предложенному въ этой замѣткѣ пріему, такъ какъ всѣ рѣшенные въ ней вопросы, рѣшаются и при пособіи другихъ извѣстныхъ способовъ; тѣмъ не менѣе однакожъ я счёлъ, что не совсѣмъ безполезно будетъ указать на такой пріёмъ, который подводитъ подъ одну общую формулу, объединяющую рѣшенія цѣлаго ряда задачъ, принадлежащихъ къ одной и той же категоріи. При этомъ я имѣлъ въ виду и то̀, что разнообразіе взглядовъ въ научныхъ вопросахъ, и въ особенности въ Математикѣ, нерѣдко наводитъ на новыя изысканія, а иногда и на дальнѣйшія разъясненія нѣкоторыхъ извѣстныхъ выводовъ науки.

Николай Сенигов̆ъ,
учитель Математики, чистой и прикладной.

НОВООТКРЫТЫЙ

ЗАКОНЪ ПРИРАЩЕНІЙ

ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Отдѣльно напечатанная статья второго выпуска, издаваемаго **Н. Сениговымъ** сочиненія подъ заглавіемъ: „Опытъ усовершенствованія элементовъ математики“.

МОСКВА.
1893.



Николай Сениговъ,
учитель Математики, чистой и прикладной.

НОВООТКРЫТЫЙ

ЗАКОНЪ ПРИРАЩЕНІЙ

ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

Отдѣльно напечатанная статья ВТОРОГО ВЫПУСКА, издаваемаго **Н. Сениговымъ** сочиненія подъ заглавіемъ: „ОПЫТЪ УСОВЕРШЕНСТВОВАНІЯ ЭЛЕМЕНТОВЪ МАТЕМАТИКИ“.

МОСКВА.
Типо-литографія Г. С. Лашакина, Варварка, д. бр. Максимовыхъ.
1893.

Дозволено цензурою. Москва, 10 апрѣля 1893 г.

НОВООТКРЫТЫЙ

ЗАКОНЪ ПРИРАЩЕНІЙ

ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ.

„Особенно примѣчанія достойно то, что, когда *простыя числа* написаны будутъ по порядку, какъ одно за другимъ слѣдуетъ, а именно

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47 и. т. д. ,

то въ нихъ никакого правильнаго порядка не примѣчается: приращенія ихъ суть то больше, то меньше; и до сихъ поръ еще не могли открыть, слѣдуютъ ли сіи приращенія какому нибудь закону или нѣтъ“.

Таково мнѣніе *Эйлера*, выраженное имъ въ его „**Основаніяхъ алгебры**“ (С.-Пб. 1812 г. стр. 23—24), и переводчикъ этой книги экстраординарный академикъ *В. Висковатовъ* къ этому заключенію никакого присовокупленія съ своей стороны не дѣлаетъ, между тѣмъ какъ его переводъ обиленъ полезными и нерѣдко обширными примѣчаніями, относящимися къ болѣе или менѣе важнымъ алгебраическимъ теоріямъ, недостаточно развитымъ знаменитымъ авторомъ этой книги. И въ позднѣйшихъ изданіяхъ Алгебры Эйлера на иностранныхъ языкахъ, насколько намъ извѣстно, комментарій къ этому заключенію не имѣется.

И до сихъ поръ въ курсахъ теоріи чиселъ ограничиваются только указаніемъ на несостоятельность попытокъ открыть законъ простыхъ чиселъ, о которомъ идетъ рѣчь.

Съ этою цѣлью приводится прежде всего формула

$$2^{2^x}+1 ,$$

дающая дѣйствительно нѣсколько простыхъ чиселъ, полагая въ

ней $x=0,1,2,3, \ldots$; но получаемыя числа, во первыхъ, до-нельзя быстро возрастаютъ; а, во вторыхъ, скоро перестаютъ быть простыми.

Лежандръ, въ своемъ сочиненіи относительно теоріи чиселъ, посвятилъ вопросу о нахожденіи формулъ, дающихъ только простыя числа, цѣлую главу; но и имъ предложенныя формулы, хотя и доставляютъ нѣкоторыя группы простыхъ чиселъ, все же ими не достигаютъ въ общемъ видѣ рѣшеніе преслѣдуемой задачи.

Формулы *Полиньяка* во Франціи и академика *Чебышева* въ Россіи, сдѣлавшіяся извѣстными почти одновременно и касающіяся собственно числа простыхъ чиселъ въ данныхъ предѣлахъ, правда не лишены значенія въ наукѣ; тѣмъ не менѣе онѣ не исчерпываютъ своего предмета на столько, на сколько было бы то желательно по важности разсматриваемой вещи. Кромѣ того, тѣ и другія формулы на столько сложны, что не могли даже войти въ университетскій курсъ математики.

Что касается до *Бертрановой* формулы, то она еще менѣе полна.

Болѣе подробную исторію и обстоятельный анализъ вопроса о простыхъ числахъ читатель найдетъ въ трудахъ *Лежандра* и *Чебышева*, которыми такъ много сдѣлано въ теоріи чиселъ; ими и *Гауссомъ* этотъ предметъ возведенъ на степень современной науки.

Но какъ бы то ни было, вышеприведенныя слова *Эйлера* сохраняли и по нынѣ свою силу: *законъ о приращеніяхъ простыхъ чиселъ* пребывалъ неизвѣстнымъ, оставался въ вопросѣ,...... Даже употребленіе Высшаго Анализа, а именно, стремленіе выразить законъ простыхъ чиселъ, напримѣръ, при помощи *опредѣленнаго интеграла*, не подвинуло ни мало этого дѣла впередъ. Стало быть, употреблявшіеся до сихъ поръ методы нисколько не соотвѣтствовали ни природѣ, ни духу предмета; а потому приходится обратиться къ новымъ пріемамъ, избравъ иную точку отправленія, чтобы разгадать дѣйствительный характеръ изслѣдуемой вещи.

Руководствуясь только первымъ началомъ въ теоріи дѣлимости чиселъ, по которому, если всѣ слагаемыя суммы дѣлимы на какое либо число, то и сама сумма также дѣлима на то же число, и, имѣя въ виду, что каждое простое число можетъ быть написано подъ видомъ суммы изъ нѣкотораго числа слагаемыхъ, — можно, или, по крайней мѣрѣ, намъ удалось написать формулу, доставляющую всѣ простыя числа и притомъ безъ

скачковъ, въ совершенной *ихъ послѣдовательности.* Согласно съ природою самой вещи, каждое простое число находится *рядомъ дѣйствій,* указываемыхъ нашею формулою; причемъ дроби, также, по смыслу вопроса, должны быть исключаемы. Разсуждая, что для недѣлимости искомаго числа, а именно *простого*, въ него должны входить всѣ элементы, раздѣленные уже на 1, 2, 3, 5, 7, 11 и т. д., т. е. на всѣ простыя числа, на какія только позволяетъ величина разсматриваемаго числа, мы предлагаемъ на совершенно естественномъ и вполнѣ очевидномъ основаніи для вышеуказанной цѣли, слѣдующую формулу:

$$S_n = n + E\left(\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \frac{n}{7} + \frac{n}{11} + \ldots\ldots\right),$$

гдѣ E есть знакъ того, что берется только цѣлая часть численнаго выраженія, за нимъ находящагося; n—какое угодно *цѣлое* число, подъ которымъ всѣ дѣлители суть *простыя числа*, а S_n соотвѣтствующее каждому числу n *простое число.*

Въ предложенной нами формулѣ S_n полагая послѣдовательно

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

и останавливая рядъ

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \ldots\ldots$$

каждый разъ, какъ дойдемъ въ знаменателѣ до простого числа, по крайней мѣрѣ, равнаго предшествующему искомому (кромѣ первыхъ четырехъ простыхъ чиселъ 2, 3, 5 и 7), мы получимъ, какъ сейчасъ увидимъ, соотвѣтственно числа

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_k \ldots,$$

которыя доставятъ рядъ послѣдовательныхъ простыхъ чиселъ

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

А именно, будемъ имѣть

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots;$$

беря въ этомъ ряду написанные пять членовъ, въ суммѣ этихъ послѣднихъ получается $1 + 1^{37}/_{210}$; поэтому, согласно вышесдѣланнымъ условіямъ, возьмемъ

$$S_1 = 2$$

На томъ же основаніи, далѣе получаемъ

$$S_2 = 2 + E\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{3}\right) = 2 + 1 = 3;$$

$$S_3 = 3 + E\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{5} +\right) = 3 + 2 = 5;$$

$$S_4 = 4 + E\left(\frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right) = 4 + 3 = 7;$$

$$S_5 = 5 + E\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{5} + \frac{5}{7}\right) = 5 + 3 + E\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7}\right) = 5 + 4 + 2 = 11;$$

$$S_6 = 6 + E\left(\frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{5} + \frac{6}{7} + \frac{6}{11}\right) = 6 + 6 + E\left(\frac{1}{5} + \frac{6}{7} + \frac{6}{11}\right) =$$

$$= 12 + 1 = 13;$$

$$S_7 = 7 + E\left(\frac{7}{2} + \frac{7}{3} + \frac{7}{5} + \frac{7}{7} + \frac{7}{11} + \frac{7}{13}\right) =$$

$$= 14 + E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{7}{11} + \frac{7}{13}\right) = 14 + 3 = 17;$$

$$S_8 = 8 + E\left(\frac{8}{2} + \frac{8}{3} + \frac{8}{5} + \frac{8}{7} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{17}\right) =$$

$$= 8 + 4 + E\left(2\tfrac{2}{3} + 1\tfrac{3}{5} + 1\tfrac{1}{7}\right) + E\left(\frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{17}\right) =$$

$$= 12 + 5 + 2 = 19;$$

$$S_9 = 9 + E\left(\frac{9}{2} + \frac{9}{3} + \frac{9}{5} + \frac{9}{7} + \frac{9}{11} + \frac{9}{13} + \frac{9}{17} = \frac{9}{19}\right) =$$

$$= 9 + 9 + E\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{2}{7} + \frac{9}{11} + \frac{9}{13} + \frac{9}{17} + \frac{9}{19}\right) =$$

$$= 18 + 5 = 23;$$

$$S_{10}=10+E\left(\frac{10}{2}+\frac{10}{3}=\frac{10}{5}+\frac{10}{7}+\frac{10}{11}+\frac{10}{13}+\frac{10}{17}+\frac{10}{19}+\frac{10}{23}\right)+$$

$$+E\left(\frac{10}{29}+\frac{10}{31}+\frac{10}{37}\right)=29$$

Примѣчаніе. Число 29, собственно говоря не выходитъ изъ S_{10}, ибо пришлось присовокупить $E\left(\frac{10}{29}+\frac{10}{31}+\frac{10}{37}\right)$; но изъ S_{11} число 29 получается сполна, такъ что во всякомъ случаѣ, пропуска этого числа не было бы, если и не сдѣлали такого присовокупленія, которое, впрочемъ, позволительно.

$$S_{11}=11+6+4+2+2+1+E\left(\frac{11}{13}+\frac{11}{17}+\frac{11}{19}+\frac{11}{23}+\frac{11}{29}\right)=$$

$$=26+3 \text{ (даже безъ } \frac{11}{29})=29;$$

$$S_{12}=31;$$

$$S_{13}=31;$$

$$S_{14}=31;$$

$$S_{15}=37;$$

$$S_{16}=41;$$

$$S_{17}=43.$$

Не продолжая далѣе, скажемъ, что безъ всякого затрудненія нашли бы, что, напримѣръ,

$$S_{100}=283 \;;\; S_{211}\ 733.$$

Этимъ пока и окончимъ наше сообщеніе о законѣ приращеній простыхъ чиселъ. Другіе способы полученія простыхъ чиселъ, также вновь выведенные на основаніи другихъ соображеній, составятъ предметъ особой статьи.

Марта 27 1893 г. *Николай Сенчеовъ.*

НАИМЕНЬШІЯ ГРУППЫ ЧИСЕЛЪ

ДЛЯ ОБРАЗОВАНІЯ

НАТУРАЛЬНЫХЪ РЯДОВЪ.

Задача. Какое наименьшее число гирь и какія именно гири, въ [illegible] наименьшихъ [illegible], достаточно имѣть для взвѣшиванія всѣхъ грузовъ отъ 1 фун., напримѣръ, до 40 фун. и проч., безъ частей фунта.

Е. С. Давыдовъ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-литографія [illegible]
1903.



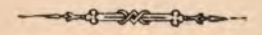
НАИМЕНЬШІЯ ГРУППЫ ЧИСЕЛЪ

ДЛЯ ОБРАЗОВАНІЯ

НАТУРАЛЬНЫХЪ РЯДОВЪ.

Задача. Какое наименьшее число гирь и какія именно гири, съ общимъ наименьшимъ вѣсомъ, достаточно имѣть для взвѣшиванія всѣхъ грузовъ отъ 1 фун., напримѣръ, до 40 фун. и проч., безъ частей фунта?

Е. С. Давыдовъ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-литографія В. В. Комарова, Невскій, 136.
1903.

Дозволено цензурою СПБ, 7 Мая 1903 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

		страница
I.	Введеніе	1
II.	Нахожденіе всѣхъ чиселъ, образующихся изъ даннаго количества какихъ угодно чиселъ	4
III.	Нахожденіе наименьшихъ группъ чиселъ, образующихъ наибольшіе натуральные ряды	10
IV.	Нахожденіе наименьшихъ группъ чиселъ, образующихъ меньшіе натуральные ряды	23
V.	Рѣшеніе задачи о взвѣшиваніи	31

Наименьшія группы чиселъ для образованія натуральныхъ рядовъ.

—

I.

Введеніе.

§ 1. *Задача. Какое наименьшее число гирь и какія именно гири, съ общимъ наименьшимъ вѣсомъ, достаточно имѣть для взвѣшиванія всѣхъ грузовъ отъ 1 фунта до 40 фунтовъ включительно, не считая частей фунта? При этомъ каждый грузъ должно взвѣшивать сразу, а не по частямъ.*

Примѣчаніе. Для грузовъ, вѣсомъ меньше фунта, слѣдуетъ имѣть особо составной фунтъ.

Рѣшеніе вопроса очевидно сводится на нахожденіе наименьшаго количества такихъ чиселъ, цѣлыхъ или дробныхъ пока неизвѣстно,—чтобы, произведя надъ ними всѣ возможныя или только нѣкоторыя сложенія и вычитанія, а также, при надобности и возможности, беря самыя числа отдѣльно, если онѣ будутъ цѣлыя, можно было бы въ результатѣ получить всѣ члены натуральнаго ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots\ldots 39, 40. \qquad (1)$$

При этомъ сумма искомыхъ чиселъ должна быть наименьшая изъ возможныхъ.

Всякія числа, изъ которыхъ такимъ способомъ вообще получается натуральный рядъ, будемъ называть *образующими числами.* Образующія числа въ совокупности составятъ *образующую группу* натуральнаго ряда. Группу съ наименьшимъ числомъ образующихъ чиселъ, дающихъ при

томъ сумму наименьшую изъ возможныхъ, назовемъ *наименьшею образующею группою натуральнаго ряда.*

Очевидно, сумма всѣхъ образующихъ чиселъ въ наименьшей группѣ не можетъ быть меньше послѣдняго, наибольшаго, члена ряда.

§ 2. Къ сказанному приведемъ примѣръ.

Возьмемъ четыре числа: 2, 3, 7 и 21.

Помощью этихъ чиселъ только что изложеннымъ способомъ получаются члены натуральнаго ряда отъ 1 до 31 включительно такъ:

$1=3-2$
$2=2$
$3=3$
$4=7-3$
$5=7-2$
$6=7-(3-2)=7+2-3$
$7=7$
$8=7+(3-2)=7+3-2$
$9=7+2$
$10=7+3$
$11=21-(7+3)$
$12=21-(7+2)$
$13=21-(7+3-2)=21+2-(7+3)$
$14=21-7$
$15=21-(7-3+2)=21+3-(7+2)$
$16=21-(7-2)\quad=21+2-7$
$17=21-(7-3)\quad=21+3-7$
$18=21-3$
$19=21-2$
$20=21-(3-2)\quad=21+2-3$
$21=21$
$22=21+(3-2)=21+3-2$
$23=21+2$
$24=21+3$
$25=21+(7-3)=21+7-3$
$26=21+3+2$
$27=21+(7-3+2)=21+7+2-3$
$28=21+7$
$29=21+(7+3-2)=21+7+3-2$
$30=21+7+2$
$31=21+7+3$

Числа 32 посредствомъ чиселъ: 2. 3, 7 и 21 нельзя найти, и, слѣдовательно, числа: 2, 3, 7 и 21 даютъ натуральный рядъ только отъ 1 до 31 включительно.

Числа: 1, 3, 9 и 20 образуютъ натуральный рядъ отъ 1 до 33 включительно. И т. д.

По отношенію къ данной задачѣ (§ 1) эти примѣры поясняютъ слѣдующее.

Имѣя гири: въ 2 фн., 3 фн., 7 фн. и 21 фн., можно взвѣшивать всѣ грузы отъ 1 фн. до 31 фн. включительно; при гиряхъ: въ 1 фн., 3 фн., 9 фн. и 20 фн.—взвѣшивать грузы отъ 1 фн. до 33 фн. включительно.

Въ первомъ случаѣ каждый изъ грузовъ: 2 фн., 3 фн., 7 фн. и 21 фн. взвѣшивается непосредственно только одной изъ имѣющихся гирь; грузъ же, напримѣръ, въ 20 фн.—тремя гирями: въ 21 фн., 2 фн. и 3 фн., для чего гири въ 21 фн. и 2 фн. кладутся на свободную чашку вѣсовъ, а гиря въ 3 фн. на чашку съ грузомъ.

Кромѣ чиселъ: 2, 3, 7 и 21, рядъ:

$$1, 2, 3 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, 31$$

можетъ получиться такъ же изъ чиселъ 4, 5, 7, 22 или изъ чиселъ: 1, 6, 8, 9, 15 или изъ чиселъ: 3, 4, 8, 7 и 21, и т. д.

Если бы теперь доказали, что этотъ рядъ можетъ образоваться не менѣе, какъ изъ 4 чиселъ, и что для него другихъ образующихъ, дающихъ сумму наивозможно меньшую 33-хъ, не существуетъ, то группа чиселъ: 2, 3, 7 и 21 была бы наименьшей образующей группой (§ 1), 4 гири составили бы наименьшее число гирь, необходимыхъ при взвѣшиваніи всѣхъ грузовъ отъ 1 фн. до 31 фн. включительно, безъ частей фунта, и общій вѣсъ ихъ въ 33 фн. былъ бы при этомъ тоже наименьшій *).

---

*) Далѣе увидимъ, что группа (2, 3, 7, 21) не есть наименьшая образующая группа ряда чиселъ отъ 1 до 31 включительно.

II.

Нахожденіе всѣхъ чиселъ, образующихся изъ даннаго количества какихъ угодно чиселъ.

§ 3. Рѣшимъ общій вопросъ: найдемъ способъ опредѣленія наименьшихъ образующихъ группъ для всякихъ конечныхъ натуральныхъ рядовъ чиселъ.

Съ этою цѣлью составимъ сначала таблицы формулъ всѣхъ чиселъ, какія только могутъ получиться способомъ, указаннымъ въ § 1, изъ 2, 3, 4 и болѣе какихъ угодно чиселъ.

§ 4. Изъ двухъ какихъ-нибудь чиселъ x и y, полагая $x<y$, при сказанномъ условіи получается всего 4 различныхъ числа:

$$x, \qquad y+x,$$
$$y, \qquad y-x,$$

или, скажемъ, двѣ группы чиселъ: въ первой группѣ находится меньшее образующее число, а во второй—3 числа: одно число—второе образующее, другое—это образующее, увеличенное на число первой группы, и третье—то же образующее, уменьшенное на число первой группы *). Напишемъ названныя группы въ слѣдующей таблицѣ по столбцамъ:

Таб. 1.

x	$y-x$
	y
	$y+x$

Здѣсь, какъ видно, формулы во второмъ столбцѣ расположены по возрастающимъ численнымъ величинамъ ихъ сверху внизъ. Подобное расположеніе формулъ по ихъ численнымъ величинамъ сдѣлаемъ и въ каждомъ изъ столб-

*) Отрицательная разность x-y въ данномъ случаѣ не принимается въ разсчетъ, такъ какъ для вопроса нужны только абсолютныя величины; абсолютная же величина этой разности выражается уже разностью $y-x$. Такое же замѣчаніе относится и ко всѣмъ послѣдующимъ формуламъ подобнаго рода.—Отрицательныя числа могутъ дать въ частныхъ случаяхъ нѣкоторыя изъ формулъ, входящихъ въ таблицу.

цовъ таблицъ, которыя составятся при дальнѣйшемъ изложеніи настоящей статьи. При этомъ вездѣ, равно какъ и въ 1-й таблицѣ, будемъ полагать, что $x<y-x$.

§ 5. Чтобы получить формулы всѣхъ чиселъ, образующихся помощью 3 какихъ-нибудь чиселъ: x, y и z, полагая $x<y<z$, очевидно, нужно взять всѣ формулы чиселъ, образующихся помощью чиселъ x и y, и присоединить къ нимъ въ видѣ отдѣльныхъ формулъ: а) самое число z, б) разности между z и каждой изъ формулъ чиселъ, образующихся изъ x и y, и в) суммы отъ сложенія z съ каждой изъ тѣхъ же формулъ.

Такимъ образомъ, для образованія формулъ чиселъ, соотвѣтствующихъ образующимъ: x, y и z, надо представить себѣ вмѣсто трехъ образующихъ какъ бы всего два образующихъ числа: одно — большее, z, а другое — соединеніе чиселъ x и y, или, вмѣсто x и y, — группу формулъ, образующихся помощью этихъ чиселъ (x и y), и затѣмъ написать требуемыя формулы по табл. 1-й. - При такомъ порядкѣ полученія формулъ составится слѣдующая таблица:

Таб. 2.

x	$y-x$	$z-(y+x)$
	y	$z-y$
	$y+x$	$z-(y-x)$
		$z-x$
		z
		$z+x$
		$z+(y-x)$
		$z+y$
		$z+(y+x)$

§ 6. Разсуждая при составленіи формулъ всѣхъ чиселъ, образующихся изъ 4 какихъ-нибудь чиселъ: x, y, z и v, при чемъ $x<y<z<v$, подобно тому, какъ и при 3 образующихъ числахъ, получимъ слѣдующую таблицу формулъ:

Таб. 3.

x	$y-x$	$z-(y+x)$	$v-(z+y+x)$
	y	$z-y$	$v-(z+y)$
	$y+x$	$z-(y-x)$	$v-(z+y-x)$
		$z-x$	$v-(z+x)$

	z	$a-z$
	$z+x$	$v-(z-x)$
	$z+(y-x)$	$v-(z-y+x)$
	$z+y$	$v-(z-y)$
	$z+(y+x)$	$v-(z-y-x)$
		$v-(y+x)$
		$v-y$
		$v-(y-x)$
		$v-x$
		v
		$v+x$
		$v+(y-x)$
		$v+y$
		$v+(y+x)$
		$v+(z-y-x)$
		$v+(z-y)$
		$v+(z-y+x)$
		$v+(z-x)$
		$v+z$
		$r+(z+x)$
		$v+(z+y-x)$
		$v+(z+y)$
		$v+z+x+x$

§ 7. Таблица формулъ, всѣхъ чиселъ, образующихся помощью пяти чиселъ: x, y, z, v и t, полагая $x<y<z<v<t$, будетъ такая:

Таб. 4.

x	$y-x$	$z-(y+x)$	$v-(z+y+x)$	$t-(v+z+y+x)$
	y	$z-y$	$v-(z+y)$	$t-(v+z+y)$
	$y+x$	$z-(y-x)$	$v-(z+y-x)$	$t-(v+z+y-x)$
		$z-x$	$v-(z+x)$	$t-(v+z+x)$
		z	$v-z$	$t-(v+z)$
		$z+x$	$v-(z-x)$	$t-(v+z-x)$
		$z+(y-x)$	$v-(z-y+x)$	$t-(v+z-y+x)$
		$z+y$	$v-(z-y)$	$t-(v+z-y)$
		$z+(y+x)$	$v-(z-y-x)$	$t-(v+z-y-x)$
			$v-(y+x)$	$t-(v+y+x)$
			$v-y$	$t-(v+y)$
			$v-(y-x)$	$t-(v+y-x)$
			$v-x$	$t-(v+x)$
			v	$t-v$

$v + x$
$v + (y - x)$
$v + y$
$v + (y + x)$
$v + (z - y - x)$
$v + (z - y)$
$v + (z - y + x)$
$v + (z - x)$
$v + z$
$v + (z + x)$
$v + (z + y - x)$
$v + (z + y)$
$v + z + y + x$

$t - (v - x)$
$t - (v - y + x)$
$t - (v - y)$
$t - (v - y - x)$
$t - (v - z + y + x)$
$t - (v - z + y)$
$t - (v - z + y - x)$
$t - (v - z + x)$
$t - (v - z)$
$t - (v - z - x)$
$t - (v - z - y + x)$
$t - (v - z - y)$
$t - (v - z - y - x)$
$t - (z + y + x)$
$t - (z + y)$
$t - (z + y - x)$
$t - (z + x)$
$t - z$
$t - (z - x)$
$t - (z - y + x)$
$t - (z - y)$
$t - (z - y - x)$
$t - (y + x)$
$t - y$
$t - (y - x)$
$t - x$
t
$t + x$
$t + (y - x)$
$t + y$
$t + (y + x)$
$t + (z - y - x)$
$t + (z - y)$
$t + (z - y + x)$
$t + (z - x)$
$t + z$
$t + (z + x)$
$t + (z + y - x)$
$t + (z + y)$
$t + (z + y + x)$
$t + (v - z - y - x)$
$t + (v - z - y)$
$t + (v - z - y + x)$

$t+(v-z-x)$
$t+(v-z)$
$t+(v-z+x)$
$t+(v-z+y-x)$
$t+(v-z+y)$
$t+(v-z+y+x)$
$t+(v-y-x)$
$t+(v-y)$
$t+(v-y+x)$
$t+(v-x)$
$t+v$
$t+(v+x)$
$t+(v+y-x)$
$t+(v+y)$
$t+(v+y+x)$
$t+(v+z-y-x)$
$t+(v+z-y)$
$t+(v+z-y+x)$
$t+(v+z-x)$
$t+(v+z)$
$t+(v+z+x)$
$t+(v+z+y-x)$
$t+(v+z+y)$
$t+(v+z+y+x)$

Подобно этимъ таблицамъ составятся таблицы формул. всѣхъ чиселъ, образующихся изъ 6, 7 и болѣе образующихъ чиселъ.

§ 8. Такимъ образомъ, каждый столбецъ формулъ каждой изъ предыдущихъ таблицъ (§§ 4, 5, 6 и 7) составляется по одному и тому закону: формулы каждаго столбца составляютъ: 1) новое образующее число непосредственно, 2) разности между новымъ образующимъ числомъ и каждой изъ формулъ (числомъ) всѣхъ предыдущихъ столбцовъ и 3) суммы, получаемыя отъ сложенія новаго образующаго съ каждой изъ тѣхъ же формулъ.

§ 9. Въ таблицахъ: 1-ой, 2-й, 3-й, 4-й . . . . . (§§ 4, 5, 6 и 7) ни одна изъ возможныхъ формулъ образующихся чиселъ не пропущена. Дѣйствительно, представивъ себѣ какую-нибудь подобную формулу, расположимъ члены ея по убывающей ихъ абсолютной величинѣ слѣва направо; затѣмъ, если членовъ въ формулѣ больше двухъ, то заключимъ ихъ всѣхъ, кромѣ перваго (большаго) въ скобки съ

знакомъ плюсъ или минусъ. Такимъ преобразованіемъ мы, очевидно, приведемъ формулу къ виду одной изъ формулъ, имѣющихся въ таблицахъ. Если у члена съ наибольшей абсолютной величиной будетъ знакъ минусъ, то прежде упомянутыхъ сейчасъ преобразованій, у всѣхъ членовъ формулы слѣдуетъ вынести знакъ минусъ за скобки. Для примѣра возьмемъ слѣдующія формулы при 4 образующихъ числахъ:

$$1)\, x+z-y, \qquad 2)\, x-v+y, \qquad 3)\, y-v-x+z.$$

Преобразовывая ихъ, получимъ:

$$1)\, x+z-y=z-y+x=z-(y-x)$$

Формула эта находится въ 3 столбцѣ табл. 3-ей (§ 6).

$$2)\, x-v+y=-[-x+v-y]=-[v-y-x]=-[v-(y+x)]$$

Формула эта съ обратнымъ знакомъ находится въ 4 столбцѣ той же табл.

$$3)\, y-v-x+z=-[-y+v+x-z]=-[v-z-y+x]=-[v-(z+y-x)]$$

Эта формула съ обратнымъ знакомъ находится въ 4-мъ столб. той же таблицы.

§ 10. Каждая изъ таблицъ въ §§ 4, 5, 6 и 7 при подстановкѣ въ формулы ея какихъ-нибудь численныхъ значеній образующихъ не всегда дастъ столько различныхъ образующихся чиселъ, сколько въ таблицѣ находится формулъ, потому что при этомъ численныя величины нѣкоторыхъ формулъ окажутся одинаковыми. Измѣняя же группу образующихъ чиселъ и подставляя новыя числа въ формулы той же таблицы, получимъ, вообще, и новыя образующіяся числа, и въ другомъ количествѣ ихъ. Такъ, взявъ группу изъ 4 образующихъ чиселъ: 4, 5, 7 и 22, по формуламъ таблицы 3-ей, въ § 6, получимъ числа; 1, 2, 3, 4, 5 . . . . 30, 31, 33, 34, и 38—всего 34 различныхъ образующихся числа; если же за образующія числа примемъ: 5, 6, 9 и 27, то образующіяся числа будутъ: 1, 2, 3, 4, 5 . . . . 32, 33, 35, 36, 37, 38 41 и 42—всего 40 различныхъ образующихся чиселъ. Въ послѣднемъ случаѣ число образующихся чиселъ равно числу формулъ таблицы и, слѣдовательно (§ 9), есть наибольшее, какое только можетъ получиться при различныхъ

	z	$a-z$
	$z+x$	$v-(z-x)$
	$z+(y-x)$	$v-(z-y+x)$
	$z+y$	$v-(z-y)$
	$z+(y+x)$	$v-(z-y-x)$
		$v-(y+x)$
		$v-y$
		$v-(y-x)$
		$v-x$
		v
		$v+x$
		$v+(y-x)$
		$v+y$
		$v+(y+x)$
		$v+(z-y-x)$
		$v+(z-y)$
		$v+(z-y+x)$
		$v+(z-x)$
		$v+z$
		$r+(z+x)$
		$v+(z+y-x)$
		$v+(z+y)$
		$v+z+x+x$

§ 7. Таблица формулъ, всѣхъ чиселъ, образующихся помощью пяти чиселъ: x, y, z, v и t, полагая $x < y < z < v < t$, будетъ такая:

Таб. 4.

x	$y-x$	$z-(y+x)$	$v-(z+y+x)$	$t-(v+z+y+x)$
	y	$z-y$	$v-(z+y)$	$t-(v+z+y)$
	$y+x$	$z-(y-x)$	$v-(z+y-x)$	$t-(v+z+y-x)$
		$z-x$	$v-(z+x)$	$t-(v+z+x)$
		z	$v-z$	$t-(v+z)$
		$z+x$	$v-(z-x)$	$t-(v+z-x)$
		$z+(y-x)$	$v-(z-y+x)$	$t-(v+z-y+x)$
		$z+y$	$v-(z-y)$	$t-(v+z-y)$
		$z+(y+x)$	$v-(z-y-x)$	$t-(v+z-y-x)$
			$v-(y+x)$	$t-(v+y+x)$
			$v-y$	$t-(v+y)$
			$v-(y-x)$	$t-(v+y-x)$
			$v-x$	$t-(v+x)$
			v	$t-v$

$v+x$
$v+(y-x)$
$v+y$
$v+(y+x)$
$v+(z-y-x)$
$v+(z-y)$
$v+(z-y+x)$
$v+(z-x)$
$v+z$
$v+(z+x)$
$v+(z+y-x)$
$v+(z+y)$
$v+z+y+x$

$t-(v-x)$
$t-(v-y+x)$
$t-(v-y)$
$t-(v-y-x)$
$t-(v-z+y+x)$
$t-(v-z+y)$
$t-(v-z+y-x)$
$t-(v-z+x)$
$t-(v-z)$
$t-(v-z-x)$
$t-(v-z-y+x)$
$t-(v-z-y)$
$t-(v-z-y-x)$
$t-(z+y+x)$
$t-(z+y)$
$t-(z+y-x)$
$t-(z+x)$
$t-z$
$t-(z-x)$
$t-(z-y+x)$
$t-(z-y)$
$t-(z-y-x)$
$t-(y+x)$
$t-y$
$t-(y-x)$
$t-x$
t
$t+x$
$t+(y-x)$
$t+y$
$t+(y+x)$
$t+(z-y-x)$
$t+(z-y)$
$t+(z-y+x)$
$t+(z-x)$
$t+z$
$t+(z+x)$
$t+(z+y-x)$
$t+(z+y)$
$t+(z+y+x)$
$t+(v-z-y-x)$
$t+(v-z-y)$
$t+(v-z-y+x)$

Рѣшая полученныя системы уравненій по способу подстановки, находимъ:

Въ (I)	Въ (II) системѣ.	Въ (III) систем.	Въ (IV) систем.	Въ (V) систем.
$x=1$	$x=1$	$x=1$	$x=1$	$x=1$
	$y=3$	$y=3$	$y=3$	$y=3$
		$z=9$	$z=9$	$z=9$
			$v=27$	$v=27$
				$t=81$

Натуральные ряды чиселъ, которые въ данномъ случаѣ представятъ формулы столбцовъ, будутъ слѣдующіе:

въ первомъ столбцѣ—одно число. . . . 1 (1
въ перв. двухъ столб:—нат. рядъ чис.: 1,2,3,4, (2
» » трехъ » — » » » 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13; (3
» » четырехъ » — » » » 1,2,3,4,5. . . . . 39,40; (4
» » пяти » — » » » 1,2,3,4,5. . . . . 120,121; (5

Если бы взяли таблицу формулъ, получаемыхъ изъ большаго числа образующихъ, то, разсуждая и поступая во всемъ подобно предыдущему, и называя шестое, седьмое и т. д. образующія числа буквами: t_1, t_2, t_3 и проч., получили бы:

1) Разности въ группахъ столбцовъ были бы:

Въ первыхъ 6 столбцахъ:	Въ первыхъ 7 столбцахъ:	
x	x	
$y-2x$	$y-2x$	
$z-2(y+x)$	$z-2(y+x)$	И т. д.
$v-2(z+y+x)$	$v-2(z+y+x)$	
$t-2(v+z+y+x)$	$t-2(v+z+y+x)$	
$t_1-2(t+v+x+y+x)$	$t_1-2(t+v+z+y+x)$	
	$t_2-2(t_1+t+v+z+y+$	

2) Образующія числа оказались бы соотвѣтственно:

$x=1$	$x=1$	
$y=3$	$y=3$	
$z=9$	$z=9$	
$v=27$	$v=27$	И т. д.
$t=81$	$t=81$	
$t_1=243$	$t_1=243$	
	$t^2=729$	

3) Формулы таблицы представили бы слѣдующіе натуральные ряды:

Въ первыхъ	6	столбцахъ—	1,2,3,4,5,6,	. . . 363,364	(6)
»	» 7	»	1,2,3,4,5,6,	. . . . 1092,1093.	(7)
»	» 8	»	1,2,3,4,5,6,	. . . . . 3279,3280.	(8)
»	» 9	»	1,2,3,4,5,6,	. . . . . 9840,9841.	(9)

И т. д.

§ 14. Число членовъ въ каждомъ изъ натуральныхъ рядовъ: (1), (2), (3) . . . . . ., приведенныхъ въ § 13, равно наибольшему числу различныхъ чиселъ, какое можетъ получиться изъ соотвѣтствующей группы образующихъ чиселъ (§§ 13 и 12).

Количество образующихъ чиселъ такой группы для образованія наиб. натур. ряда будетъ наименьшее (§ 10).

§ 15. Вслѣдствіе этого натуральные ряды: (1), (2), (3), (4) . . . . ., въ § 13, будемъ называть *наибольшими натуральными рядами* въ отличіе отъ рядовъ, которые могутъ получиться при томъ же числѣ образующихъ чиселъ, какъ и наибольшіе, но съ меньшимъ числомъ членовъ. Такъ, напримѣръ, изъ чиселъ: 2, 3, 7 и 21 образуется только меньшій, или малый натур. рядъ 1, 2, 3, 4 . . . . 30, 31, (§ 2); изъ чиселъ: 1, 3, 9 и 20 образуется такой же рядъ: 1, 2, 3, 4 . . . . 32, 33; наибольшій же натур. рядъ изъ 4 чиселъ будетъ о 40 членахъ (§§ 13 и 14). Къ названіямъ: «наибольшій» и «меньшій» натур. ряды слѣдуетъ прибавлять: «изъ *стольких-то* образующихъ чиселъ», подразумѣвая при этомъ наименьшее количество ихъ.

§ 16. Изъ § 13 видно, что полученные въ немъ наибольшіе натур. ряды образуются изъ слѣдующихъ чиселъ:

рядъ (1)—	изъ	числа	1
» (2)—	»	чиселъ:	1 и 3
» (3)—	»	»	1, 3 и 9
» (4)—	»	»	1, 3, 9 и 27
» (5)—	»	»	1, 3, 9, 27 и 81
» (6)—	»	»	1, 3, 9, 27, 81, 243
» (7)—	»	»	1, 3, 9, 27, 81, 243 729
» (8)—	»	»	1, 3, 9, 27, 81, 243 729 2187

И т. д.

Эти же образующія числа составляютъ послѣдовательные члены геометрической прогрессіи:

$$\div 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5 \; . \; . \; . \; . \; . \; ,$$

начиная съ перваго ея члена.

Можно доказать вообще, что для всякаго наибольшаго натур. ряда, получаемаго по общей таблицѣ формулъ (§ 7), при наименьшемъ количествѣ образующихъ его чиселъ (§ 14), послѣднія будутъ такого же свойства, то-есть равны первымъ послѣдовательнымъ членамъ упомянутой геометрической прогрессіи.

Прежде чѣмъ доказывать это непосредственно, сдѣлаемъ небольшія поясненія.

Представимъ себѣ таблицу H, подобную таблицѣ въ § 7, составленную при неограниченно большомъ числѣ образующихъ чиселъ *).

По закону составленія формулъ въ столбцахъ таблицы (§ 8) слѣдуетъ, что послѣдняя формула въ каждой группѣ первыхъ послѣдовательныхъ столбцовъ всегда представляетъ сумму всѣхъ образующихъ чиселъ группы, а первая формула въ столбцѣ, непосредственно слѣдующемъ за этой группой столбцовъ,—новое образующее число безъ суммы предыдущихъ образующихъ чиселъ.

Изъ § 13 видно, что къ формуламъ разностей въ каждой послѣдующей группѣ g первыхъ послѣдовательныхъ столбцовъ прибавляется по одному уравненію, выражающему разность между послѣднимъ образующимъ числомъ для этой группы столбцовъ g и удвоенной суммой образующихъ чиселъ предыдущей группы. Эта разность (d) получается отъ вычитанія послѣдней формулы предыдущей группы столбцовъ (формулы, выражающей, какъ сейчасъ было сказано, сумму всѣхъ образующихъ для группы) изъ первой формулы непосредственно стѣдующаго столбца за этой группой (формулы, выражающей разность между новымъ образующимъ числомъ и суммою предыдущихъ образующихъ). Очевидно, поэтому, что такая разность (d) сохранитъ свой смыслъ, то-есть будетъ представлять разность между новымъ образующимъ и удвоенной суммой всѣхъ предыдущихъ образующихъ, при какомъ угодно числѣ первыхъ послѣдовательныхъ группъ столбцовъ таблицы H.

Остальныя разности формулъ послѣдняго столбца группы g, какъ слѣдуетъ заключить изъ закона составленія формулъ (§ 8) и какъ, въ поясненіе, это видно въ § 13, оди-

*) Формулы этой таблицы расположены отъ начала ея въ порядкѣ чиселъ натур. ряда: каждая формула при извѣстномъ послѣдующемъ предположеніи о разностяхъ выразитъ то число натур. ряда, которое теперь на нее приходится.—Порядокъ этотъ тотъ же, что и въ таблицахъ §§ 4, 5, 6 и 7.

наковы съ формулами разностей для группы первыхъ столбцовъ, находящейся передъ этимъ столбцомъ.

Изъ § 13 и начала настоящаго, 16-го, параграфа видно, что при двухъ образующихъ числахъ, 1 и 3, наибольшаго натур. ряда показатель у образующаго числа 3 есть единица; при трехъ образующихъ: 1, 3 и 3^2 наибольшій показатель у образующаго числа 3 есть два, при четырехъ образующихъ: 1, 3, 3^2 и 3^3 таковой показатель равенъ 3, и т. д. Вообще при n образующихъ числахъ наибольшаго натур. ряда показатель у 3 равенъ $n-1$. При этомъ номеръ наиб. натур. ряда равенъ числу чиселъ, образующихъ натур. рядъ.

Теперь обратимся къ доказательству. Допустимъ, что для первыхъ n наибольшихъ натур. рядовъ законъ составленія образующихъ чиселъ справедливъ, то есть образующими служатъ члены вышеупомянутой геометрической прогрессіи. Въ такомъ случаѣ докажемъ, что онъ справедливъ и для $(n+1)$-го наибольшаго натур. ряда.

Итакъ, пусть для n-го наиб. натур. ряда образующія числа есть:

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3\ \ldots\ldots,\ 3^{n-1};$$

докажемъ, что для $(n+1)$-го наиб. натур. ряда образующія числа будутъ:

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3\ \ldots\ldots\ldots,\ 3^{n-1},\ 3^n.$$

Вслѣдствіе такого допущенія и на основаніи изложеннаго въ настоящемъ параграфѣ о разности формулъ таблицы H, для первыхъ n столбцовъ этой таблицы, изъ которыхъ получается наиб. натуральный рядъ при n образующихъ числахъ, справедливы слѣдующія n уравненій:

$$\left.\begin{aligned} x&=1\\ y-2x&=1\\ z-2(y+x)&=1\\ v-2(z+y+x)&=1\\ t-2(v+z+y+x)&=1\\ t_1-2(t+v+z+y+{}&\\ +x)&=1\\ &\ldots\\ t_{n-6}-2(t_{n-7}+\ldots+t_1+t+v+{}&\\ +z+y+x)&=1\\ t_{n-5}-2(t_{n-6}+t_{n-7}+\ldots+t_1+t+{}&\\ +v+z+y+x)&=1 \end{aligned}\right\}$$

или, перенося члены,—уравненія:

$$\begin{aligned} x&=1\\ y&=2x+1\\ z&=2(y+x)+1\\ v&=2(z+y+x)+1\\ t&=2(v+z+y+x)+1\\ t_1&=2(t+v+z+y+\\ &\quad+x)+1\\ &\ldots\\ t_{n-6}&=2(t_{n-7}+\ldots+t_1+t+v+\\ &\quad+z+y+x)+1\\ t_{n-5}&=2(t_{n-6}+t_{n-7}\ldots+t_1+t+v+\\ &\quad+z+y+x)+1 \end{aligned}\qquad (a)$$

Обозначивъ искомое число въ образующей группѣ слѣдующаго, $(n+1)$-го наиб. натур. ряда буквою u, для опредѣленія $n+1$ образующихъ чиселъ точно такъ же будемъ имѣть $n+1$ уравненіе:

$$\left.\begin{aligned} x&=1\\ y-2x&=1\\ z-2(y+x)&=1\\ v-2(z+y+x)&=1\\ t-2(v+z+y+x)&=1\\ t_1-2(t+v+z+y+&\\ +x)&=1\\ &\;\vdots\\ t_{n-6}-2(t_{n-7}+\dots+t+&\\ v+z+y+x)&=1\\ t_{n-5}-2(t_{n-6}+t_{n-7}+\dots+t+&\\ +v+z+y+x)&=1\\ u-2(t_{n-5}+t_{n-6}+\dots+t+&\\ +v+z+y+x)&=1 \end{aligned}\right\}$$

или, перенося члены, — уравненія:

$$\begin{aligned} x&=1\\ y&=2x+1\\ z&=2(y+x)+1\\ v&=2(z+y+x)+1\\ t&=2(v+z+y+x)+\\ &\quad+1\\ t_1&=2(t+v+z+y+\\ &\quad+x)+1 \qquad (б)\\ &\;\vdots\\ t_{n-6}&=2(t_{n-7}+\dots+t+v+\\ &\quad+z+y+x)+1\\ t_{n-5}&=2(t_{n-6}+t_{n-7}+\dots+t+v\\ &\quad+z+y+x)+1\\ u&=2(t_{n-5}+t_{n-6}+\dots+t+v\\ &\quad+z+y+x)+1 \end{aligned}$$

Въ обѣихъ системахъ уравненій *(a)* и *(б)* одинаковыя буквы имѣютъ одно и то же численное значеніе.

Выражая, помощью послѣдовательной подстановки, вторыя части во всѣхъ уравненіяхъ системы *(б)* въ x, и полагая затѣмъ вездѣ x равнымъ единицѣ, получимъ:

$$\begin{aligned} x&=1\\ y&=3\\ z&=3^2\\ v&=3^3\\ t&=3^4\\ t_1&=3^5\\ &\;\vdots\\ t_{n-6}&=3^{n-2}\\ t_{n-5}&=3^{n-1}\\ u&=2\left(3^{n-1}+3^{n-2}+\dots+3^5+3^4+3^3+3^2+3+1\right)+\\ &+1=2\left(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+\dots+3^{n-2}+\right.\\ &\left.+3^{n-1}\right)+1. \end{aligned}$$

Сумма, заключенная здѣсь въ скобкахъ, есть сумма членовъ возрастающей геометрической прогрессіи

$$\div\!\!\div 1, 3, 3^2, 3^3, \; . \; . \; . \; . \; 3^{n-2}, 3^{n-1};$$

она, какъ извѣстно, равняется $\frac{3^{n-1} \cdot 3-1}{3-1} = \frac{3^n-1}{2.}$

Поэтому

$$u = 2 \; . \; \frac{3^n-1}{2} + 1 = 3^n \cdot$$

Итакъ, для $(n+1)$-го наиб. натурал. ряда образующія числа будутъ:

$$1, \; 3, \; 3^2, 3^3 \; . \; . \; . \; . \; 3^{n-1} \text{и} \; 3^n.$$

Такимъ образомъ *образующія числа всякаго наибольшаго натур. ряда при наименьшемъ ихъ количествѣ составляютъ первые послѣдовательные члены геометрической прогрессіи*

$$\div\!\!\div 1, \; 3, \; 3^2, \; 3^3, \; 3^4, \; 3^5 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

§ 17. Табличка, помѣщенная въ § 12, даетъ возможность находить послѣднее, наибольшее, изъ чиселъ, образующихъ наибольшій натур. рядъ. Дѣлается это на слѣдующемъ основаніи и слѣдующимъ образомъ.

Изъ закона составленія формулъ образующихся чиселъ (§ 8) видно, что въ число образующихся входятъ отдѣльно и самыя образующія числа по-разу. (См., напр., таб. 4, въ § 7). При этомъ каждому такому отдѣльно стоящему числу s. въ таблицѣ *) предшествуетъ формулъ отъ начала таблицы вдвое больше, чѣмъ ихъ получается изъ всѣхъ образующихся чиселъ, кромѣ s. Такъ, въ таблицѣ 3-й (§ 6), составленной изъ чиселъ: x, y, z и v, передъ v, стоящимъ въ четвертомъ столбцѣ таблицы, находится формулъ вдвое больше, чѣмъ ихъ образуется изъ чиселъ: x, y и z, то-есть вдвое больше числа всѣхъ формулъ въ первыхъ трехъ столбцахъ.

Относя изложенное здѣсь къ наибольшимъ натуральнымъ рядамъ, слѣдуетъ сказать, что члену ряда, равному наибольшему образующему числу, предшествуетъ членовъ ряда вдвое больше, чѣмъ ихъ находится въ предыдущемъ наиб. ряду, полученномъ изъ всѣхъ образующихъ, кромѣ наиболь-

---

*) Расположеніе формулъ въ таблицѣ такое же, какое указано въ выноскѣ къ § 16.

шаго. Замѣтивъ къ этому еще, что число единицъ въ каждомъ членѣ ряда равно номеру члена отъ начала ряда, заключаемъ: *удвоивъ число всѣхъ членовъ какого-нибудь наиб. натур. ряда и прибавивъ къ произведенію единицу, найдемъ наибольшее изъ образующихъ чиселъ слѣдующаго наибольшаго натур. ряда.*

Такъ, удвоивъ 13, число членовъ наиб. натур. ряда (§ 12) при трехъ образующихъ числахъ, и прибавивъ къ произведенію единицу, получимъ 27—наибольшее изъ чиселъ: 1, 3, 9 и 27, образующихъ наибольшій натур. рядъ о 40 членахъ.

Образующія числа по той же табличкѣ можно находить еще иначе.—Во всякомъ наиб. натур. ряду послѣ члена, равнаго послѣднему наибольшему образующему числу, находится столько членовъ ряда, сколько ихъ всего въ предыдущемъ наиб. натур. ряду (§§ 7 и 8). А потому, *если изъ числа членовъ какого-либо наибольшаго натур. ряда вычесть число членовъ предыдущаго наиб. натур. ряда, то найдемъ послѣднее, большее, изъ образующихъ чиселъ перваго наиб. натур. ряда*

Такимъ образомъ, въ § 12, вычитая 1 изъ 4, получимъ 3—наибольшее число изъ двухъ, образующихъ наиб. натур. рядъ о 4 членахъ; вычитая 4 изъ 13, получимъ 9—наибольшее изъ трехъ чиселъ, образующихъ наибольшій натур. рядъ о 13 членахъ. И т. д.

§ 18. Такъ какъ въ опредѣленныхъ системахъ уравненій: (I), (II), (III) . . . , въ § 13, всѣ уравненія первой степени, то каждая система имѣетъ только одно рѣшеніе, полученное въ § 13. Поэтому, кромѣ образующихъ группъ чиселъ (§ 16):

1,	для	наиб.	натур.	ряда	(1),
1 и 3,	»	»	»		(2),
1, 3 и 9,	»	»	»		(3),
1, 3, 9 и 27		»	»		(4),
1, 3, 9, 27 и 81		»	»		(5),
1, 3, 9, 27, 81 и 243			»		(6),

И т. д.

для этихъ *наибольшихъ натур. рядовъ другихъ группъ съ такимъ же количествомъ образующихъ чиселъ не существуетъ.*

Нѣтъ также группъ чиселъ, образующихъ наибольшіе натур. ряды, которыя содержали бы меньше образующихъ чиселъ, чѣмъ найденныя группы (§ 14).

Образующія числа въ найденныхъ группахъ, будучи равны первымъ послѣдовательнымъ членамъ геомет. прогрессіи (÷÷1, 3, 3^2, 3^3, 3^4 . . . .) (§ 16), имѣютъ еще слѣдующее свойство: *сумма этихъ чиселъ въ каждой группѣ равна послѣднему, наибольшему, члену наибольшаго натур. ряда, образующагося изъ группы.*

Это свойство видно при составленіи наиб. натуральныхъ рядовъ по таблицѣ (§ 13): въ каждой изъ группъ первыхъ послѣдовательныхъ столбцовъ таблицы послѣдняя формула, выражая сумму чиселъ, образующихъ формулы этой группы, представляетъ и послѣдній членъ получаемаго изъ группы наибольшаго натур. ряда.

§ 19. Каждая изъ найденныхъ группъ, образующихъ наиб. натур. ряды (§ 16), заключая въ себѣ наименьшее число образующихъ чиселъ (§ 18), сумма которыхъ при этомъ равна послѣднему члену ряда (§ 18), будетъ *наименьшая образующая группа* этого ряда (§ 1).

Можно еще иначе сказать: каждая найденная группа (§ 16) есть *наименьшая* потому, что она единственная образующая группа наибольшаго натур. ряда съ наименьшимъ числомъ образующихъ (§ 18).

§ 20. Расположимъ геометрическую прогрессію

$$\div 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4 \ldots$$

и получаемые изъ ея членовъ наиб. натур. ряды чиселъ въ слѣдующей таблицѣ:

Таблица А.

÷	1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, ...
Нб. нат. ряд.	1
	1,2,3,4
	1,2,3,4,5 . . 9 . . 13
	1,2,3,4,5,6 . . 13 . . 27 . . 40
	1,2,3,4,5,6,7 . . . . . . 40 . . 81 . . 121
	1,2,3,4,5,6,7,8 . . . . 121 . . 243 . . 364
	1,3,3,4,5,6,7,8.9 . . . . 364 . . 729 . . 1093
	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 . . . . 1093 . . 2187 . . 3280.

И т. д.

Пунктирная линія, идущая кверху отъ послѣдняго члена наибольш. натур. ряда, отдѣляетъ въ геометрической прогрессіи, влѣво надъ чертой, всѣ образующія числа этого ряда.

Послѣдній членъ каждаго наиб. натур. ряда равняется утроенному послѣднему члену предыдущаго наиб. натуральнаго ряда плюсъ единица (§ 13 и 11).

Послѣдній членъ наиб. натур. ряда равняется также суммѣ всѣхъ чиселъ, образующихъ этотъ рядъ (§ 18) *).

*) Отсюда (или § 17) слѣдуетъ: разность между послѣдними членами двухъ смежныхъ наибол. натур. рядовъ равна наибольшему числу изъ образующихъ большій рядъ. Наприм.: 4—1=3, 13—4=9, 40—13=27 и т. д. Всѣ такія разности составляютъ послѣдовательные члены геометр. прогрессіи

$$\div 1, 3, 9, 27, 81 \ldots$$

начиная съ перваго ея члена, (См. таблицу въ этомъ параграфѣ).

§ 21. Зависимость между послѣдними членами наибольшихъ натур. рядовъ, а также между послѣдними членами и числами, образующими такіе ряды, (§ 20), даетъ возможность рѣшить слѣдующій вопросъ: *Узнать безъ помощи таблицы А, будетъ ли данный натуральный рядъ наибольшій или нѣтъ.*

На основаніи первой зависимости для этого поступаемъ такъ. Изъ послѣдняго члена даннаго натурал. ряда вычитаемъ единицу и разность дѣлимъ на 3. Если дѣленіе совершится безъ остатка, то, вычитая изъ частнаго единицу, полученную разность дѣлимъ на 3. Въ случаѣ дѣленія безъ остатка, изъ втораго частнаго вычитаемъ единицу; новую разность дѣлимъ на 3. И такъ продолжаемъ до тѣхъ поръ, когда въ частномъ получится число, равное послѣднему члену какого-нибудь извѣстнаго намъ, на-память, наибольшаго натур. ряда, или же получится единица, представляющая собою первый наиб. натур. рядъ. Въ этихъ случаяхъ данный натур. рядъ будетъ наибольшій.

Если же какая-нибудь изъ вышеупомянутыхъ разностей не раздѣлится на 3, то данный нат. рядъ не будетъ наибольшій (§ 20) *).

По неполному числу дѣленій предыдущихъ разностей на 3, безъ остатка, и не помня при этомъ ни одного послѣдняго члена подходящихъ наиб. натур. рядовъ, нельзя вообще заключить о томъ, что данный натур. рядъ будетъ наибольшій.

Дѣйствительно, возьмемъ, наприм., рядъ:

$$1, 2, 3, 4 \ldots \ldots 606, 607. \qquad (c)$$

Поступая по—предыдущему для опредѣленія, будетъ ли онъ наибольшій, видимъ, что каждая изъ первыхъ пяти разностей дѣлится на 3 безъ остатка, шестая же отъ дѣленія на 3 даетъ въ остаткѣ единицу (частное 0). — Рядъ бу-

---

*) Наприм., ряды:

1, 2, 3, 4 . . . . . 15, 16
1, 2, 3, 4 . . . . . . 21, 22
1, 2, 3, 4 . . . . 48, 49
1, 2, 3, 4 . . . . 75, 76
1, 2, 3, 4 . . . . 102, 103

И т. д

детъ не наибольшій *). Ограничиться здѣсь при испытаніи только нѣсколькими дѣленіями нельзя.

По второй зависимости рѣшаемъ вопросъ слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ числа, образующія наибольшій натур. рядъ, составляютъ первые члены геометр. прогрессіи, въ которой первый членъ есть 1, а знаменатель прогрессіи есть 3, и такъ какъ сумма образующихъ равна послѣднему члену l натуральнаго ряда, то, называя послѣднее, наибольшее, образующее число буквою v, имѣемъ:

$$l=\frac{3v-1}{3-1} \text{ **)}$$

$$\text{или } l=\frac{3v-1}{2}, \text{ откуда } v=\frac{2l+1}{3} \quad . \ . \ . \ . \ (h)$$

---

*) Такого рода нат. рядовъ множество. Получить ихъ можно изъ всякаго меньшаго нат. ряда. Для этого, написавши одинъ изъ такихъ рядовъ (наприм., для натур. ряда (c) былъ взятъ рядъ изъ двухъ членовъ, 1 и 2), нужно написать еще другой рядъ съ послѣднимъ членомъ, равнымъ суммѣ утроеннаго послѣдняго члена перваго ряда и единицы; затѣмъ,—третій натур. рядъ съ послѣднимъ членомъ, равнымъ суммѣ утроеннаго послѣдняго члена второго ряда и единицы. И т. д.—Такимъ образомъ образуются ряды, имѣющіе сказанное сейчасъ свойство.

При такомъ образованіи рядовъ ни одного наибол. натур. ряда не получится. Объясненіе этого. Назовемъ послѣдній членъ взятаго меньшаго ряда буквою a. Послѣдними членами слѣдующихъ натур. рядовъ будутъ по порядку:

$$\begin{array}{lll} & & 3a+1 \\ 3\,(3a+1)+1, & \text{или:} & 9a+4 \\ 3\,(9a+4)+1, & \text{„} & 27a+13 \qquad (d) \\ 3\,(27a+13)+1, & \text{„} & 81a+40 \end{array}$$

И т. д.

Положимъ, что какая-нибудь изъ этихъ сумма можетъ оказаться равной послѣднему члену одного изъ наиб. нат. рядовъ. Назвавъ наибольшее изъ чиселъ, образующихъ такой рядъ, буквою v, находимъ, что послѣдній членъ наиб. натур. ряда, равный суммѣ образующихъ: 1, 3, 9, 27, 81 . . . v, (§ 20), по формулѣ суммы членовъ геом. прогрессіи будетъ

$$\frac{3v-1}{2}.$$

Приравнивая это выраженіе каждому изъ выраженій (d) и опредѣляя v изъ каждаго полученнаго уравненія, найдемъ слѣдующія значенія для v:

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 3\,(2a+1) \\ 9\,(2a+1) \qquad (e) \\ 27\,(2v+1) \end{array}$$

и т. д.

Но v, какъ одно изъ чиселъ, образующихъ наиб. нат. рядъ, есть нѣкоторая степень числа 3. Чтобы выраженія (e) представляли степени числа 3, нужно въ этихъ выраженіяхъ положить a равнымъ одному изъ чиселъ 1, 4, 13, 40, 121 . . . . , то-есть послѣднему члену одного изъ наиб. нат. рядовъ. Но a представляетъ собою послѣдній членъ только меньшаго ряда.

Итакъ, наибольшихъ натур. рядовъ въ данномъ случаѣ не получится.

**) Сумма членовъ геометр. прогрессіи.

Если по формулѣ (*h*), подставляя въ нее вмѣсто *l* послѣдній членъ даннаго натур. ряда, для *v* получится цѣлое число, представляющее притомъ степень числа 3, то данный натуральный рядъ будетъ наибольшій.

По второй зависимости, узнавая посредствомъ опредѣленія величины наибольшаго образующаго числа, будетъ ли данный натур. рядъ чиселъ наибольшій или нѣтъ, одновременно, слѣдовательно, *для наибольшаго натур. ряда находимъ и наименьшую образующую его группу*.—Группа эта будетъ: (1, 3, 9, 27 . . . . *v*: 9, *v* : 3, *v*).

IV.

Нахожденіе наименьшихъ группъ чиселъ, образующихъ меньшіе натурал. ряды.

§ 22. Въ предыдущихъ параграфахъ были найдены наименьшія группы чиселъ, образующихъ наибольшіе натур. ряды. Очевидно, что наименьшая группа образующихъ чиселъ для какого-либо наибол. натуральнаго ряда служитъ образующей группой и для всякаго меньшаго натур. ряда, въ которомъ всѣхъ членовъ заключается меньше, чѣмъ въ названномъ наибольш. натур. ряду, но больше, чѣмъ въ первомъ предшествующемъ ему наибольшемъ натур. ряду *). Такимъ образомъ числа: 1, 3, 9 и 27, образующія наибольшій натур. рядъ

1, 2, 3, 4, ... 38, 39, 40,

суть также и образующія каждаго изъ слѣдующихъ натур. рядовъ:

1, 2, 3, 4, ... 38, 39,
1, 2, 3, 4, ... 38,
1, 2, 3, 4, ... 37
⋮
1, 2, 3, 4, ... 16
1, 2, 3, 4, . . . 15
1, 2, 3, 4, . . . 14

---

*) Группа эта для такого меньшаго ряда будетъ наименьшей по количеству образующихъ чиселъ (только).

§ 23. Но меньшіе натур. ряды имѣютъ еще свои наименьшія группы образующихъ чиселъ. Займемся нахожденіемъ такихъ группъ.

Обратимся къ табл. 3-й, въ § 6, и положимъ что формулы ея попорядку представляютъ числа наибольшаго натур. ряда. Въ такомъ случаѣ $x=1$, $y=3$, $z=9$ и $v=27$. Оставляя здѣсь образующія числа: x, y и z безъ перемѣны, будемъ измѣнять образующее число v. Возьмемъ его теперь равнымъ 26. При такомъ предложеніи въ первый трехъ столбцахъ таблицъ перемѣнъ не будетъ, и формулы попрежнему представятъ наибольшій натур. рядъ отъ 1 до 13 включительно; въ четвертомъ же столбцѣ окажется, что первая формула, $v-(z+y+x)$, дастъ число $26-13=13$, то-есть число, которое получается отъ послѣдней формулы $(z+y+x)$ въ третьемъ столбцѣ. Поэтому формула: $v-(z+y+x)$—лишняя, ее придется выпустить, и принять далѣе всѣ слѣдующія формулы, которыя и дадутъ попорядку цѣлыя числа отъ 14 до 39 включительно. Число 39 опредѣлится по послѣдней формулѣ, $v+z+y+x$:

$$v+z+y+x=39 \quad (г)$$

Окончательно изъ таблицы 3-й получится натур. рядъ чиселъ:

1, 2, 3, 4, 5 . . . . .38, 39;

образующими его числами будутъ: 1, 3, 9 и 26.

Сумма образующихъ по (г) равняется послѣднему члену натур. ряда.

Полагая далѣе въ таб. 3-й, при тѣхъ же условіяхъ относительно чиселъ: x, y и z, v равнымъ 25, мы должны будемъ пропустить формулы: $v-(z+y+x)$ и $v-(z+y)$, послѣ чего остальныя формулы въ четвертомъ столбцѣ дадутъ числа отъ 14 до 38 включительно, и таблица представитъ натур. рядъ чиселъ:

1, 2, 3, 4, 5 . . . . .37, 38,

съ образующими его числами: 1, 3, 9 и 25, причемъ

$$v+z+y+x=38.$$

Принимая затѣмъ послѣдовательно v равнымъ: 24, 23, 22 . . . . 3. 2 и 1, получимъ:

Натур. ряды:	*Образующія ихъ числа:*
1, 2, 3, 4, 5 37	1, 3, 9, 24
1, 2; 3, 4, 5 36	1, 3, 9, 23
1, 2, 3, 4, 5 35	1, 3, 9, 22
. .	.
. .	.
. .	.
1, 2, 3, 4, 5 . . . 16	1, 3, 9, 3
1, 2, 3, 4, 5 . . . 15	1, 3, 9, 2
1, 2, 3, 4, 5 . . 14	1, 3, 9, 1

Здѣсь, наприм., при $v=2$ будутъ пропущены въ таблицѣ всѣ формулы 4-го столбца, начиная съ 1-й и до 25-й включительно; при $v=1$—всѣ формулы съ 1-й и до 26-й включительно.

Въ каждой изъ приведенныхъ здѣсь образующихъ группъ сумма образующихъ чиселъ равна наибольшему члену натуральнаго ряда, соотвѣтствующаго группѣ.

Поэтому группы эти, состоящія изъ наименьшаго числа образующихъ (§ 10), будутъ *наименьшія* (§ 1).

Такимъ образомъ, чтобы по образующимъ числамъ: 1, 3, 9 и 27 наибольшаго натур. ряда: 1, 2, 3, 4 . . . 39, 40 найти вышеназванныя наименьшія группы образующихъ чиселъ всѣхъ послѣдовательно меньшихъ рядовъ съ 4 образующими, нужно наибольшее образующее, 27, постепенно уменьшать на единицу, оставляя остальныя образующія безъ перемѣны.

Подобно тому какъ измѣняли число v въ группѣ образующихъ чиселъ: x, y, z и v, можно измѣнять и z въ группѣ x, y и z, образующей соотвѣтствующій наибол. натур. рядъ. Въ этомъ случаѣ получимъ:

Мен. натур. ряды:	*Числа въ наименьшихъ образующихъ ихъ группахъ.*
1, 2, 3, 4 12	1, 3, 8
1, 2, 3, 4 11	1, 3, 7
1, 2, 3, 4 . . . 10	1, 3, 6
. .	.
. .	.
. .	.
. .	.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 3, 3
1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 3, 2
1, 2, 3, 4, 5	1, 3, 1

Точно также, измѣняя число y въ группѣ x и y, образующей наибольшій натур. рядъ, найдемъ:

Мен. натур. ряды:	*Числа въ наименьшихъ образующихъ ихъ группахъ.*
1, 2, 3	1, 2
1, 2	1, 1

Для меньшихъ натур. рядовъ съ большимъ числомъ образующихъ чиселъ соотвѣтствующія наименьшія группы получатся такимъ же образомъ, какъ и для натур. рядовъ съ меньшимъ количествомъ образующихъ.

§ 24. Изъ 23 слѣдуетъ *правило: Чтобы найти наименьшую образующую группу какого-нибудь меньшаго натур. ряда, нужно: 1) опредѣлить въ ней по таблицѣ (въ § 12) наименьшее число образующихъ чиселъ* *), *и 2) принять за числа группы всѣ числа наименьшей образующей группы соотвѣтсжвующаго наибол. натур. ряда, (то-есть ряда съ тѣмъ же наименьшимъ числомъ образуюшихъ, какъ и данный), кромѣ послѣдняго ея числа, и еще число, равное разности между послѣднимъ, наибольшимъ, членомъ даннаго ряда и суммою чиселъ, взятыхъ изъ образующей группы наиб. натур. ряда.*

Примѣръ. Найти наименьшую группу чиселъ, образующихъ натур. рядъ.

1, 2, 3, 4, 5 ,6 . . . . 34, 35.

Рѣшеніе. Изъ § 12, по § 14, узнаемъ, что данный натур. рядъ заключается между двумя наибольшими натур. рядами: однимъ съ 13 членами, и другимъ о 40 членахъ. Наименьшая образующая группа послѣдняго натур. ряда состоитъ изъ 4 чиселъ, слѣдовательно, и наименьшая образ. группа даннаго натур. ряда тоже изъ 4 чиселъ. Наименьшая образ. группа наиб. натур. ряда о 40 членахъ есть: (1, 3, 9 и 27), а наименьшая образ. группа натуральнаго ряда съ 35 членами, по правилу, будетъ (1, 3, 9, 22).

§ 25. На основаніи вышеизложеннаго составляется слѣдующая таблица натуральныхъ рядовъ и наименьшихъ группъ образующихъ ихъ чиселъ:

---

*) Для этого въ таблицѣ нужно найти два числа, означающихъ количество образующихся чиселъ, выражающихъ въ то же время и число членовъ наибольшихъ натур. рядовъ (§ 14), между которымн заключается данный натур. рядъ. Наименьшее число образующихъ этотъ послѣдній будетъ такое же, какъ и для наибол. натуральнаго ряда (§ 10).

Натур. ряды *).	*Наименьшія образующія группы.*
1	1
1,2	1,1
1,2,3	1,2
1,2,3,4	1,3
1,2,3,4,5	1,3,1
1,2,3,4,5,6	1,3,2
1,2,3,4,5,6,7	1,3,3
1,2.3,4,5,6,7,8	1,3,4
1,2,3,4,5,6,7,8,9	1,3,5
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10	1,3,6
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	1,3,7
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	1,3,8
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13	1,3,9
1,2,3,4,5 13,14	1,3,9,1
1,2,3,4,5 14,15	1,3,9,2
1,2,3,4,5 15,16	1,3,9,3
.	.
.	.
.	.
1,2,3,4,5 37,38	1,3,9,25
1,2,3,4,5 38,39	1,3,9.26
1,2,3,4,5 39,40	1,3,9,27
1,2,3,4,5 40,41	1,3,9,27,1
1,2,3,4,5 41,42	1,3,9,27,2
1,2,3,4,5 42,43	1,3,9,27,3
.	.
.	.
.	.
1,2,3,4,5 118,119	1,3,9,27,79
1,2,3,4,5 119,120	1,3,9,27,80
1,2,3,4,5 120,121	1,3,9,27,81
1,2,3,4,5 121,122	1,3,9,27,81,1
1,2,3,4,5 122,123	1,3,9,27,81,2
.	.
.	.
.	.
1,2,3,4,5 362,363	1,3,9,27,81,242.
1,2,3,4,5 363,364	1,3,9,27,81,243.

и т. д.

§ 26. Изъ предыдущей таблицы (§ 25) видно слѣдующее:

1) Если къ наименьшей группѣ образующихъ чиселъ для наибольшаго натур. ряда прибавить отдѣльнымъ образующимъ числомъ единицу, то изъ новой группы образуется слѣдующій натур. рядъ, однимъ членомъ больше предыдущаго

Такъ, напр., натур. ряды	Наим. образ. группы
1, 2, 3, 4	1, 3
1, 2, 3, 4, 5	1, 3, 1

*) Каждый наибольшій натур. рядъ помѣщенъ здѣсь подъ всѣми соотвѣтствующими ему меньшими натур. рядами и подчеркнутъ.

Объясненіе этого по §§ 5 и 8. Если къ группѣ (1, 3), образующей натур. рядъ: 1, 2, 3, 4, присоединяется новое образующее число 1, то, для составленія всѣхъ образующихся чиселъ по новой группѣ образующихъ, нужно къ числамъ: 1, 2, 3, 4 присоединить отдѣльными числами: а) саму единицу, б) суммы, получаемыя отъ сложенія единицы съ каждымъ изъ чиселъ: 1, 2, 3 и 4, и в) остатки отъ вычитанія изъ единицы каждаго изъ тѣхъ же чиселъ.

Но отъ сложенія 1 отдѣльно: съ 1, 2, 3 и 4 получатся числа: 2, 3, 4 и 5, а отъ вычитанія изъ 1 этихъ же чиселъ— числа: 0,−1,—2,−3. Изъ отрицательныхъ чиселъ беремъ только абсолютныя величины и затѣмъ для вновь составляемаго ряда—только различныя числа; а таковыми окажутся тѣ же: 1, 2, 3, 4 и еще число 5, получаемое отъ сложенія большаго изъ нихъ съ единицей.

2) Если въ образующей группѣ меньшаго натур. ряда послѣднее число увеличить на единицу, то въ новомъ натур. ряду однимъ членомъ будетъ больше, чѣмъ въ предыдущемъ. Объясненіе по §§ 5 и 8 подобно изложенному въ первомъ пунктѣ настоящаго параграфа, взявъ число 2 вмѣсто 1. И т. д.

3) Сумма послѣдняго члена меньшаго изъ предѣльныхъ наибольшихъ натур. рядовъ *) съ послѣднимъ числомъ образующей группы меньшаго натур. ряда равна послѣднему, наибольшему члену этого меньшаго ряда.

Примѣръ. Натур. ряды:	Наим. образ. группы
1, 2, 3, 4 . . 12 (13)	1, 3, 9
1, 2, 3, 4. . . 17, 18, (19)	1, 3, 9, (6)

Числа, заключенныя въ скобки, таковы:

$$13+6=19$$

Настоящее, 3-е, заключеніе слѣдуетъ изъ первыхъ двухъ Это, 3-е, заключеніе могло бы служить для нахожденія наименьшихъ группъ, ооразующихъ меньшіе натур. ряды.

§ 27. Положомъ, что въ табл. 3-й, § 6, по которой получаются всѣ числа, образующіяся изъ 4 какихъ угодно чиселъ, всѣ формулы представляютъ попорядку числа наибольшаго натурал. ряда. Въ такомъ случаѣ $x=1, y=3, x=9$ и $v=27$. Пусть теперь y равняется 2, оставляя $x=1$. Тогда

*) Ближайшіе наибольшіе натур. ряды, между которыми заключается данный меньшій натуральный рядъ.

въ таблицѣ окажется слѣдующее: 1) въ первыхъ двухъ столбцахъ формула: $x-y$ численно будетъ равно x (§ 23—уменьшаемъ на единицу послѣднее образующее число въ группѣ (x, y)), и 2) вслѣдствіе того, что $x-y=x$, въ третьемъ и въ четвертомъ столбцахъ формулы въ каждой изъ слѣдующихъ паръ:

$$
\begin{array}{lcl}
z-(y-x) & \text{и} & z-x \\
z+(y-x) & \text{и} & z+x \\
v-(y-x) & \text{и} & v-x \\
v+(y-x) & \text{и} & v+x \\
v-(z-y+x) & \text{и} & v-(z-x) \\
v-(z+y-x) & \text{и} & v-(z+x) \\
v+(z-y+x) & \text{и} & v+(z-x) \\
v+(z+y-x) & \text{и} & v+(z+x)
\end{array}
$$

численно будутъ также равны между собою. А потому, при образованіи всѣхъ *различныхъ* чиселъ по таблицѣ, нужно принять въ разсчетъ только по одной формулѣ въ каждой изъ 9 предыдущихъ паръ. Отбросимъ формулы: $x-y$ и первыя формулы въ каждой изъ остальныхъ паръ.

Теперь послѣдняя формула, $x+y$, во второмъ столбцѣ численно равна 3. Первая формула въ третьемъ столбцѣ, $z-(y+x)$, даетъ число 6. Для полученія же изъ нея числа 4, слѣдующаго за числомъ 3, получаемымъ изъ формулы: $x+y$, нужно принять z равнымъ 7. Тогда формулы 1-го, 2-го и 3-го столбцевъ, пропуская вышепомянутыя формулы изъ числа равныхъ формулъ, представятъ натуральный рядъ чиселъ:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10.

Чтобы первая формула четвертаго столбца численно равнялась слѣдующему числу этого ряда, то есть 11, нужно z взять равнымъ 21. Тогда формулы четвертаго столбца, пропуская вышеназваныя формулы изъ числа равныхъ, дадутъ попорядку всѣ цѣлыя числа отъ 11 до 31 включительно.

Такимъ образомъ *различныя* формулы таблицы представятъ натуральный рядъ чиселъ:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . . 29, 30, 31.

котораго наименьшая образующая группа состоитъ изъ чиселъ: 1, 2, 7 и 21.

Но по правилу въ § 24 для меньшаго ряда: 1, 2, 3,

4 . . 30, 31, наименьшая образующая группа есть также: (1, 3, 9 и 18).

§ 28. Отсюда видно (§ 27), что образующія числа въ наименьшихъ образующихъ группахъ меньшихъ натуральныхъ рядовъ въ извѣстныхъ предѣлахъ можно измѣнять, и получать такимъ образомъ новыя наименьшія группы для тѣхъ же рядовъ.

Но какія бы ни были образующія группы у даннаго мен. натуральнаго ряда, всѣ ихъ, для образованіе ряда, можно замѣнить наименьшею группою. составленною по § 24.

Примѣры. *Натур. ряды:*	*Наим. образ. группы ихъ:*
1) 1, 2, 3, 4, 5 . . . 30,31	1, 3, 9, 18
	1, 2, 7, 21
	1, 3, 6, 21
	1, 3, 7, 20
2) 1, 2, 3, 4 . . . 6,7	1, 3, 3
	1, 2, 4
	1, 1, 5
3) 1, 2, 3, 4 . . . 13,14	1, 3, 9, 1
	1, 2, 4, 7
	1, 3, 4, 6
	1, 3, 5, 5
4) 1, 2, 3, 4, 5 . . . 17	1, 3, 9, 4
	1, 3, 6, 7
	1, 2, 5, 9
	1, 2, 4, 10
	1, 3, 5, 8
	1, 2, 3, 11
5) 1, 2, 3, 4 . . . 22,23	1, 3, 9, 10
	1, 2, 5, 15
	1, 3, 7, 12
6) 1, 2, 3, 4 . . . 67,68	1, 3, 9, 27, 28
	1, 3, 9, 14, 41.

И т. д.

§ 29. Изъ уравненій § 13 имѣемъ, напримѣръ, для наибольшаго натур. ряда, получаемаго изъ 4 образующихъ чиселъ:

$$x=1$$
$$y=2x+1$$
$$z=2(y+x)+1$$
$$v=2(z+y+x)+1$$

По этимъ равенствамъ, доставляющимъ для наименьшей группы численныя величины образующихъ съ извѣстной зависимостью между собою (§ 16), зависимость между образующими выражается еще такъ: второе образующее равняетс удвоенному первому (меньшему) плюсъ единица; третье образующее—удвоенной суммѣ двухъ первыхъ образующихъ плюсъ единица, четвертое—удвоенной суммѣ первыхъ трехъ плюсъ единица.

Для рядовъ съ 5 и болѣе образующими числами между образующими числами существуетъ подобная же зависимость. Эта зависимость вообще выражаемая такъ: *каждое изъ чиселъ наименьшей группы, образующей наибольшій натур. рядъ, равняется удвоенной суммѣ всѣхъ образующихъ, меньшихъ его, сложенной съ единицей.*

Въ каждой наим. группѣ чиселъ, образующихъ меньшій натур. рядъ, и составленной по § 24, зависимость между всѣми числами, кромѣ послѣдняго, такая же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ; послѣднее же число, равняясь разности между послѣднимъ членомъ ряда и суммою остальныхъ чиселъ группы, въ рядахъ, соотвѣтствующихъ по числу образующихъ чиселъ одному и тому же наибол. натур. ряду, уменьшается до единицы.

§ 30. Изъ вышеизложеннаго видно, что: 1) наименьшая образующая группа какого угодно натуральнаго ряда содержитъ самое меньшее количество чиселъ, какое только можетъ быть достаточно для полученія столькихъ различныхъ чиселъ, сколько всѣхъ членовъ въ ряду, и 2) сумма образующихъ чиселъ въ наименьш. группѣ равняется последнему, наибольшему, члену ряда *).

V.

Рѣшеніе задачи о взвѣшиваніи.

§ 31. Примѣняя вышеизложенную теорію о натур. рядахъ и наименьшихъ группахъ образующихъ ихъ чиселъ къ рѣшенію изложенной въ § 1 задачи относительно взвѣшиванія, находимъ, что наименьшее число гирь, помощью

---

*) Группы чиселъ, составленныя изъ одного, двухъ, трехъ, четырехъ и болѣе первыхъ послѣдовательныхъ членовъ геометр. прогрессіи:

$$\div\div\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5 \ldots\ldots\ldots$$

образуютъ натуральные ряды, изъ которыхъ въ каждомъ послѣдній, наибольшій, членъ ряда равенъ суммѣ своихъ образующихъ. Но въ этомъ случаѣ къ числу наименьшихъ образ. группъ будутъ относиться только первыя четыре: (1), (1, 2), (1, 2, 4) и (1, 2, 4, 8).

Цѣна 40 коп.

пятью гирями: въ 1 фн., 3 фн., 9 фн., 27 фн. и 81 фн.— всѣ грузы отъ 1 фн. до 121 фн.; шестью гирями: въ 1 фн. 3 фн., 9 фн., 27 фн. 81 фн. и 243 ф.—всѣ грузы отъ 1 фн., до 364 фн. И т. д. Впрочемъ, начиная съ 6 гирь взвѣшиванiе всѣхъ грузовъ небольшимъ числомъ гирь неудобно вслѣдствiе большого вѣса отдѣльныхъ гирь.

Кромѣ названныхъ здѣсь группъ гирь другихъ группъ съ такимъ же числомъ гирь, но другого вѣса, а также группъ съ меньшимъ числомъ гирь для взвѣшиванiя предыдущихъ грузовъ не существуетъ (§§ 18 и 19).

§ 34. Изложимъ самостоятельное рѣшенiе задачи о взвѣшиванiи (§ 1), не выводя его изъ общей теорiи о натур. рядахъ и наименьшихъ образующихъ ихъ группахъ.

Изъ §§ 4 и 5 видно, что помощью двухъ гирь, а также помощью трехъ получить 40 различныхъ вѣсовъ невозможно. Поэтому посмотримъ, нельзя-ли найти такiя 4 гири, которыя удовлетворяли бы требованiямъ задачи.

Въ натуральномъ ряду:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ t\ \ldots\ v\ \ldots\ 40.\qquad \text{(I)}$$

представимъ себѣ два члена его: t и v, причемъ $v>t$, такихъ, что:

а) Нат. рядъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ t$$

можетъ образоваться изъ трехъ нѣкоторыхъ чиселъ: x, y и z чрезъ ихъ сложенiе и вычитанiе, а частью, можетъ быть, непосредственнымъ включенiемъ ихъ въ этотъ рядъ.

б) Если изъ числа v послѣдовательно вычитать числа:

$$t,\ t-1,\ t-2,\ \ldots\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,$$

т

то въ осаткахъ получатся всѣ члены ряда (I) отъ $t+1$ до $v-1$ включительно, то-есть члены:

$$v-t,\ v-(t-1),\ \ldots\ v-2,\quad v-1.$$
$$\text{или: } t+1,\ t+2,\ \ldots\ldots\ t+(t-1),\ t+t,$$

всего t членовъ; а прибавляя къ v числа:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ t-1,\ t,$$

А. РЕПМАНЪ.

МАТЕРІАЛЫ

ДЛЯ

ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ:

На стран. 17 въ послѣднемъ произведеніи напечатано $443^2|9886907$, слѣдуетъ читать $4432|9896907$.

На стран. 25 въ первомъ столбцѣ вмѣсто 43 слѣдуетъ читать 34.

Товарищество типографіи А. И. Мамонтова
Леонтьевскій пер., д. № 5.
1903


Цѣна 40 коп.

А. РЕПМАНЪ.

МАТЕРІАЛЫ

ДЛЯ

ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ.



МОСКВА.
Товарищество типографіи А. И. Мамонтова
Леонтьевскій пер., д. № 5.
1903

А. РЕПМАНЪ.

МАТЕРІАЛЫ

ДЛЯ

ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ.

МОСКВА.
Товарищество типографіи А. И. Мамонтова
Леонтьевскій пер., д. № 5.
1903

Дозволено цензурою. Москва, 20 ноября 1902 года.

Введенie.

Если умножить число 142857 на 2, 3, 4, 5 или 6, то въ произведенiи будутъ получаться тѣ же цифры и въ томъ же порядкѣ, только съ различной начальной цифрой; если же это число умножить на 7, то получимъ—999999.

Если умножить число 076923 на 3, 4, 9, 10 или 12, то получимъ тѣ же цифры и въ томъ же порядкѣ, лишь съ другой начальной цифрой; то же будетъ съ числомъ 153846, если его умножать на 2, 5, 6, 7, 8 или 11; но если первое число умножить на множителей второго числа, то получаются цифры второго числа и наоборотъ: если умножить второе число на производителей перваго числа, то получаются цифры перваго числа; если же одно изъ этихъ чиселъ умножить на 13, то получимъ отъ 1-го — 999999, а отъ 2-го 1999998, т. е., то же произведенie, если седьмую цифру 1 сложить съ первой цифрой 8.

Если число 21978 умножить на 4, то получимъ 87912, т. е. цифры въ обратномъ порядкѣ.

О первоначальныхъ числахъ, и ихъ особенностяхъ въ десятичной системѣ.

Если вообще вѣрно положеніе: „Нѣтъ слѣдствія безъ причины", то такое положеніе должно быть неопровержимо въ математикѣ. Дѣйствительно, мы развиваемъ въ математикѣ одну теорему изъ другой, какъ слѣдствіе изъ причины. Но и въ математикѣ, хотя менѣе чѣмъ въ другихъ наукахъ, встрѣчаются вопросы, которые не поддаются рѣшенію такимъ путемъ и остаются загадочными. Къ такимъ вопросамъ принадлежатъ вопросы, касающіеся первоначальныхъ чиселъ, каковы, напримѣръ: существуютъ ли признаки, по которымъ можно тотчасъ узнать первоначальное число? такихъ признаковъ мы въ настоящее время не знаемъ, но они могутъ быть найдены. Какой математической формулой можно выразить рядъ послѣдовательныхъ первоначальныхъ чиселъ? Этотъ вопросъ казался намъ ближе стоящимъ къ разрѣшенію, такъ какъ число (относительное) первоначальныхъ чиселъ должно несомнѣнно уменьшаться съ увеличеніемъ естественнаго ряда чиселъ; такъ, напримѣръ: въ первой сотнѣ имѣются 26 первоначальныхъ чиселъ, во 2-й—21, въ 3-й—16. Въ этихъ трехъ сотняхъ нормальнаго ряда чиселъ мы находимъ, что число первоначальныхъ чиселъ идетъ какъ бы по уменьшающейся ариѳметической прогрессіи, но уже въ слѣдующихъ сотняхъ замѣчается полный безпорядокъ: въ 4-й сотнѣ ихъ тоже 16, въ 5-й даже 17, въ 6-й—14, въ 7-й—16, въ 8-й—14, въ 9-й—15, и въ 10-й—14. Ту же неопредѣленность мы найдемъ, если возьмемъ вмѣсто сотенъ-тысячи. Такъ, въ первой тысячѣ натуральныхъ чиселъ заключается 169 первоначальныхъ чиселъ; во второй—138; въ третьей—127, въ 4-й 120, въ 5-й—119, въ 6-й—113, въ седьмой тысячѣ снова увеличилось число первоначальныхъ чиселъ до 117, въ 8-й—106, въ 9-й—109, въ 10-й—112. Къ такимъ же отрицательнымъ результатамъ по этому вопросу привелъ насъ и другой способъ,—а имен-

но: изслѣдованіе періодическихъ дробей, происшедшихъ отъ первоначальныхъ чиселъ. Способъ этотъ, хотя не даетъ отвѣта на интересующій насъ вопросъ, но зато онъ открываетъ намъ нѣкоторыя свойства періодическихъ дробей, съ которыми я и хочу познакомить читателя. Трудъ этотъ не считаю законченнымъ, но предлагаю его лицамъ, интересующимся этимъ вопросомъ, какъ нѣкоторый матеріалъ для дальнѣйшаго изслѣдованія свойствъ и законовъ первоначальныхъ чиселъ. Съ этою же цѣлью въ концѣ приложена таблица первоначальныхъ чиселъ, имѣющихся въ естественномъ ряду чиселъ отъ 1 до 10000. Мы будемъ говорить только о чистыхъ періодическихъ дробяхъ, т. е. о такихъ, которыя произошли отъ простыхъ дробей, въ знаменателяхъ которыхъ не было производителей 2 или 5.

Начнемъ съ меньшихъ первоначальныхъ чиселъ.—Возьмемъ дробь съ знаменателемъ 3. Числителемъ такой дроби могутъ быть только 1 или 2; періодъ $\frac{1}{3}$ =0,3.... отъ $\frac{2}{3}$ 0,6... мы, слѣдовательно, имѣемъ для этого знаменателя два періода. Замѣтимъ, что сумма этихъ двухъ періодовъ = 0,999..... Возьмемъ знаменателемъ слѣдующее первоначальное число — 7; съ этимъ знаменателемъ могутъ быть шесть числителей 1, 2, 3, 4, 5. и 6. Приведемъ $\frac{1}{7}$ въ десятичную дробь:

```
1 : 7—0,142857.....
10
 30
 28
  20
  14
   60
   56
    40
    35
     50
     49
      1
```

Возьмемъ $\frac{2}{7}$ и обратимъ въ десятичную дробь.

```
20 : 7 = 0,285714.....
14
 60
 56
  40
  35
   50
   49
    10
     7
    30
    28
     2
```

Мы получили въ періодѣ тѣ-же цифры и въ томъ-же порядкѣ, только періодъ начался съ другой цифры; то же получимъ при другихъ числителяхъ: $\frac{3}{7}$ = 0,428571; $\frac{4}{7}$ = 0,571428; $\frac{5}{7}$ = 0,714285 и, наконецъ, $\frac{6}{7}$ = 0,857142 Кромѣ того, замѣтимъ, что три послѣднія цифры всегда будутъ дополнительными до 9 къ тремъ первымъ цифрамъ періода, такъ: 142 + 857 = 999; 571 + 428 = 999, и т. д. Другими словами, если мы раз-

дѣлимъ періодъ на двѣ равныя части и сложимъ три первыя цифры съ тремя послѣдними, то получимъ 0,999..... т. е. то же, что получили, сложивши два періода отъ знаменателя 3.

Какъ прямое слѣдствіе того обстоятельства, что мы отъ разныхъ числителей получаемъ тотъ же порядокъ цыфръ, ясно: умножая періодъ 0,142857 на любой изъ числителей 1, 2, 3, 4, 5 или 6, получимъ тотъ-же періодъ, только, съ другой начальной цыфрой; напримѣръ:

$$\begin{array}{r} 0{,}142857\ldots\ldots\ldots \\ 4 \\ \hline 0{,}571428\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Умножая же этотъ періодъ на 7, мы должны получить приближеніе къ $\frac{7}{7}$ т. е. къ 1, и дѣйствительно:

$$\begin{array}{r} 0{,}142857\ldots\ldots\ldots \\ 7 \\ \hline 0{,}999999\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Умножая тотъ-же періодъ на число большее 7, напримѣръ на 23 получимъ

$$\begin{array}{r} 0{,}142857 \\ 23 \\ \hline 428571 \\ 285714 \\ \hline 3285711 \end{array}$$

Отсчитавъ съ правой стороны шесть знаковъ, будемъ имѣть 3,285711; если теперь полученную цифру цѣлыхъ чиселъ сложимъ съ послѣдней цыфрой періода, то получимъ тотъ-же періодъ, какъ отъ $\frac{2}{7}$, т.е. 0,285714, потому что $\frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$. Итакъ, въ періодѣ отъ знаменаеля 7, безразлично при какомъ числителѣ, первая половина періода плюсъ вторая половина = 999. Напишемъ теперь рядъ числителей въ послѣдовательности, соотвѣтствующей цифрамъ получаемаго отъ нихъ періода. Такъ какъ послѣдовательность цифръ въ періодѣ не измѣняется, то и послѣдовательность въ ряду числителей остается постоянной, по этому безразлично какой періодъ взять для составленія послѣдовательнаго ряда числителей. Возьмемъ періодъ 571428. Этотъ періодъ получился отъ $\frac{4}{7}$; періодъ, начинающійся съ семи, получается отъ $\frac{5}{7}$, съ единицы — отъ $\frac{1}{7}$; съ 4—отъ $\frac{3}{7}$; съ 2—отъ $\frac{2}{7}$ и—наконецъ, періодъ 857142, получился отъ $\frac{6}{7}$. Послѣдовательный рядъ числителей будетъ: 4, 5, 1, 3, 2, 6. Если мы сложимъ перваго числителя съ четвертымъ, второго съ пятымъ и третьяго съ шестымъ, то получимъ 777, т. е. *знаменателя, повтореннаго* столько разъ, сколько въ періодѣ цифръ,

дѣленное на 2. Для большей наглядности расположимъ какъ цифры періода, такъ и рядъ соотвѣтствующихъ числителей въ циклическомъ порядкѣ (фиг. I). Наружный рядъ круга изображаетъ числителей, а внутренній періодическую дробь, при-томъ каждый числитель поставленъ надъ той цифрой, съ которой начинается періодъ при данномъ числителѣ. Такъ: числитель 1 подъ нимъ періодъ начинается съ 1 и идетъ, далѣе 42857; слѣдующій числитель 3, его періодъ будетъ 428571; періодъ отъ $\frac{6}{7}$ будетъ 857142 и. т. д; на этой фигурѣ ясно видно, что сумма противулежащихъ цифръ внутренняго круга всегда ровна 9, а сумма противулежащихъ числителей всегда равна знаменателю, въ нашемъ случаѣ 7.



Фиг. 1.

Теперь посмотримъ, сохраняется-ли тотъ же законъ для дробей съ знаменателями другихъ первоначальныхъ чиселъ.

Слѣдующее первоначальное число послѣ 7 будетъ 11. Дробь съ знаменателемъ 11 можетъ имѣть 10 различныхъ числителей, а слѣдовательно, мы должны получить въ періодѣ 10 цифръ. Начнемъ съ $\frac{1}{11}$

100 : 11 = 0,09..........
 99
 ——
  1

мы получили въ періодѣ только два знака, а потому мы должны получить пять различныхъ періодовъ, и каждый періодъ будетъ служить только двумъ числителямъ. Продолжаемъ анализъ:

20 : 11 = 0,18...;
11
——
 90
 88
 ——
  2

30 : 11 = 0,27....
22
——
 80
 77
 ——
  3

40 : 11 = 0,36
33
——
 70
 66
 ——
  4

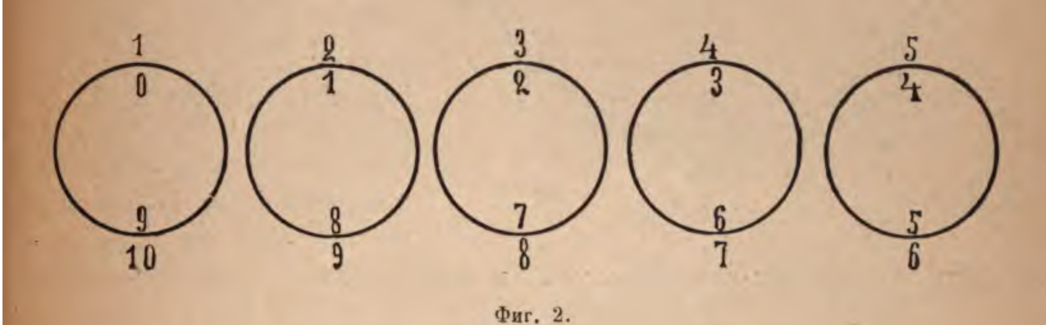
50 = 0,45.......
44
——
 60
 55
 ——
  5

Затѣмъ $\frac{6}{11}$ дадутъ такой же періодъ только съ перестановкой цифръ, т. е. 0,54...... и. т. д. Расположимъ снова числа кружками, получимъ (фиг. 2). Мы и здѣсь видимъ, что противолежащія цыфры внутри круга даютъ въ суммѣ 9, а внѣ круга 11, т. е. знаменателя.

Теперь посмотримъ, какіе періоды даетъ намъ знаменатель 13, начнемъ съ $\frac{1}{13.}$

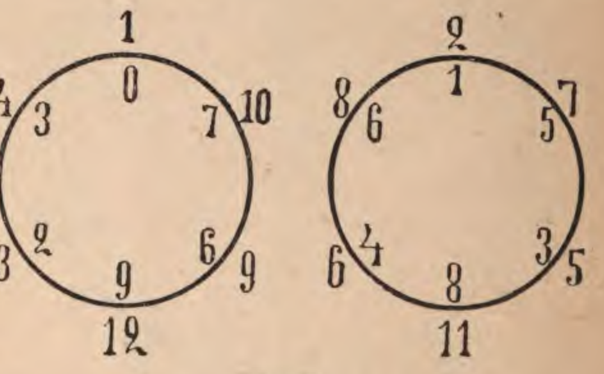
```
100:13 = 0,076923....
 91
 ——
  90
  78
  ———
  120
  117
  ———
    30
    26
    ——
     40
     39
     ——
      1
```

Періодъ кончился, но онъ имѣетъ только 6 цифръ, вмѣсто 12, очевидно, что долженъ быть второй періодъ, при томъ для такихъ числителей, которые не даютъ найденнаго періода. Легко понять, что остатки, получаемые при дѣленіи, и суть тѣ числители, которыхъ періодъ начинается съ слѣдующей цыфры частнаго. Такъ: дѣля 1 на тринадцать, получаемъ 0 цѣлыхъ; прибавляя къ ней 0 первая цыфра періода будетъ 0, а остатокъ 10; этотъ остатокъ выражаетъ числителя, котораго періодъ начнется съ цифры 7, такъ какъ



Фиг. 2.

100:13 = 7, а остатокъ 9 будетъ числителемъ, котораго періодъ начнется съ 6 и т. д. Поэтому мы можемъ сказать, что нашъ періодъ будетъ для слѣдующихъ дробей $\frac{1}{13}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{3}{13}$, и $\frac{4}{13}$, для числителей же 2, 7, 5, 11, 6, 8 долженъ быть другой періодъ; но такъ какъ $\frac{2}{13}$ въ два раза болѣе $\frac{1}{13}$, то и періодъ отъ $\frac{2}{13}$ долженъ быть вдвое болѣе чѣмъ 076923, т. е. =0,153846. Расположимъ



Фиг. 3.

полученныя числа въ циклическомъ порядкѣ (фиг. 3). Получимъ два круга, въ которыхъ опять таки—сумма внутреннихъ противолежащихъ чиселъ=9, а сумма внѣшнихъ знаменателю 13.

Слѣдующее первоначальное число 17. Дроби съ этимъ знаменателемъ, приведенныя въ десятичныя дроби, должны дать въ періодѣ 16 знаковъ. Но мы уже знаемъ, что достаточно найти половину знаковъ, другія же цифры періода будутъ дополнительными до 9 къ найденнымъ цифрамъ. Замѣтимъ еще одну особенность періода: мы можемъ найти его не только чрезъ дѣленіе, но и чрезъ умноженіе. Положимъ, что мы хотимъ найти періодъ отъ знаменателя 17. Мы видѣли, что періодъ, помноженный на знаменателя, отъ котораго онъ произошелъ, даетъ въ произведеніи 9, повторенное столько разъ, сколько знаковъ въ періодѣ; слѣдовательно, мы можемъ написать 17 производителемъ, т. е. множителемъ, и пріискивать цифры множимаго (начиная съ единицъ), такъ, чтобы въ произведеніи получались однѣ девятки. Итакъ мы пишемъ

$$\underline{\quad 17 \quad}$$

первая цифра періода съ правой стороны должна быть 7 потому, что только 7 въ произведеніи съ 17 дастъ 9 единицъ, пишемъ:

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{17} \\ 119 \end{array}$$

Для отысканія второй цифры, намъ нужно взять цифру дающую въ произведеніи съ 17 только 8 единицъ, такъ какъ мы имѣемъ уже одну единицу на второмъ мѣстѣ; эта цифра будетъ 4, и мы получимъ:



Фиг. 4.

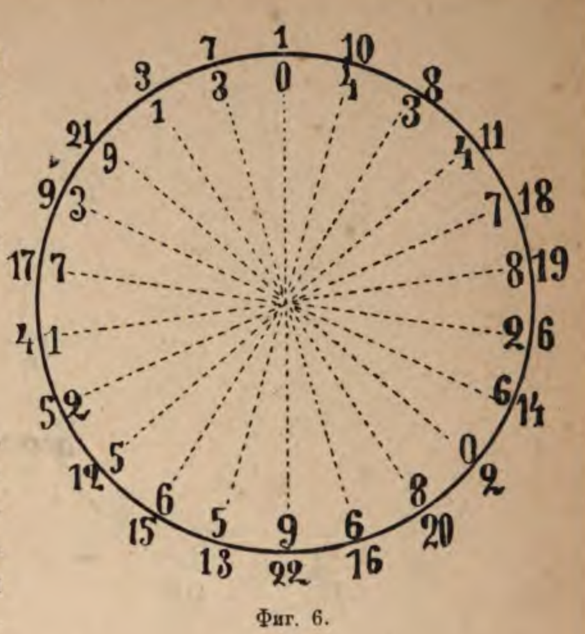


Фиг. 5.

47
17 Теперь мы имѣемъ на третьемъ мѣстѣ 7 единицъ и мы
119
68.

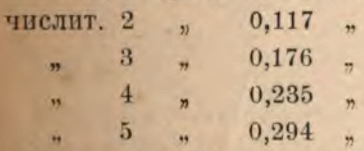
должны для третьей цифры взять число, дающее въ произведенiи съ 17 только 2 единицы — это 6, продолжая наше дѣйствiе такимъ образомъ, получаемъ:

94117647
17
1561110119
3811968
77 2



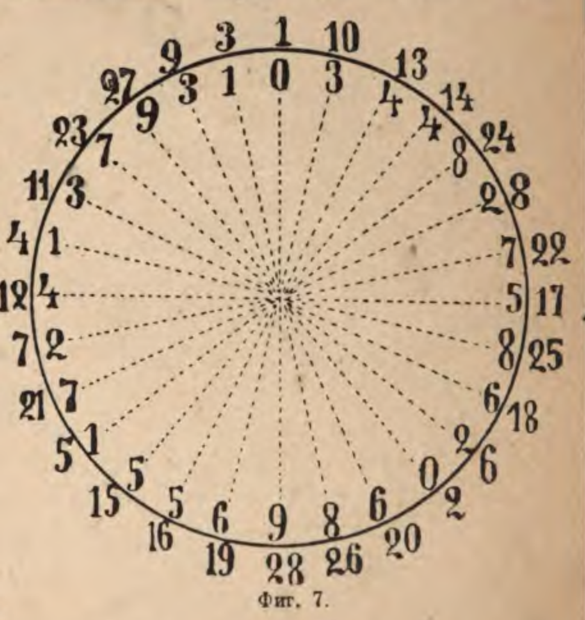
Фиг. 6.

Далѣе продолжать незачѣмъ, такъ какъ мы нашли половину перiода, т. е. 8 цифръ, остальныя будутъ къ нимъ дополнительныя до 9, и мы получаемъ весь перiодъ = 0,0588235294117647. Хотя мы при этомъ способѣ нахожденiя общаго перiода для всѣхъ числителей и не получаемъ прямо соотвѣтствующихъ числителей, но ихъ не трудно найти; въ самомъ дѣлѣ: наименьшая десятичная дробь соотвѣтствуетъ наименьшему числителю (при томъ же знаменателѣ), поэтому въ нашемъ случаѣ числитель единица будетъ имѣть перiодъ 0,058 и т.д.



числит.	2	„	0,117	„
„	3	„	0,176	„
„	4	„	0,235	„
„	5	„	0,294	„

какъ это изображено на фиг. 4. Совершенно тѣмъ же законамъ подлежатъ дроби $\frac{x}{19}$ фиг. 5; $\frac{x}{23}$ фиг. 6; $\frac{x}{29}$ фиг. 7.



Фиг. 7.

но: изслѣдованіе періодическихъ дробей, происшедшихъ отъ первоначальныхъ чиселъ. Способъ этотъ, хотя не даетъ отвѣта на интересующій насъ вопросъ, но зато онъ открываетъ намъ нѣкоторыя свойства періодическихъ дробей, съ которыми я и хочу познакомить читателя. Трудъ этотъ не считаю законченнымъ, но предлагаю его лицамъ, интересующимся этимъ вопросомъ, какъ нѣкоторый матеріалъ для дальнѣйшаго изслѣдованія свойствъ и законовъ первоначальныхъ чиселъ. Съ этою же цѣлью въ концѣ приложена таблица первоначальныхъ чиселъ, имѣющихся въ естественномъ ряду чиселъ отъ 1 до 10000. Мы будемъ говорить только о чистыхъ періодическихъ дробяхъ, т. е. о такихъ, которыя произошли отъ простыхъ дробей, въ знаменателяхъ которыхъ не было производителей 2 или 5.

Начнемъ съ меньшихъ первоначальныхъ чиселъ.—Возьмемъ дробь съ знаменателемъ 3. Числителемъ такой дроби могутъ быть только 1 или 2; періодъ $\frac{1}{3}$ =0,3.... отъ $\frac{2}{3}$ 0,6... мы, слѣдовательно, имѣемъ для этого знаменателя два періода. Замѣтимъ, что сумма этихъ двухъ періодовъ = 0,999..... Возьмемъ знаменателемъ слѣдующее первоначальное число — 7; съ этимъ знаменателемъ могутъ быть шесть числителей 1, 2, 3, 4, 5. и 6. Приведемъ $\frac{1}{7}$ въ десятичную дробь:

```
 1 : 7—0,142857.....
10
 30
 28
  20
  14
   60
   56
    40
    35
     50
     49
      1
```

Возьмемъ $\frac{2}{7}$ и обратимъ въ десятичную дробь.

```
20 : 7 = 0,285714.....
14
 60
 56
  40
  35
   50
   49
    10
     7
    30
    28
     2
```

Мы получили въ періодѣ тѣ-же цифры и въ томъ-же порядкѣ, только періодъ начался съ другой цифры; то же получимъ при другихъ числителяхъ: $\frac{3}{7}$ = 0,428571; $\frac{4}{7}$ = 0,571428; $\frac{5}{7}$ = 0,714285 и, наконецъ, $\frac{6}{7}$ = 0,857142 Кромѣ того, замѣтимъ, что три послѣднія цифры всегда будутъ дополнительными до 9 къ тремъ первымъ цифрамъ періода, такъ: 142 + 857 = 999; 571 + 428 = 999, и т. д. Другими словами, если мы раз-

дѣлимъ періодъ на двѣ равныя части и сложимъ три первыя цифры съ тремя послѣдними, то получимъ 0,999..... т. е. то же, что получили, сложивши два періода отъ знаменателя 3.

Какъ прямое слѣдствіе того обстоятельства, что мы отъ разныхъ числителей получаемъ тотъ же порядокъ цыфръ, ясно: умножая періодъ 0,142857 на любой изъ числителей 1, 2, 3, 4, 5 или 6, получимъ тотъ-же періодъ, только, съ другой начальной цыфрой; напримѣръ:

$$\begin{array}{r} 0{,}142857\ldots\ldots \\ 4 \\ \hline 0{,}571428\ldots\ldots \end{array}$$

Умножая же этотъ періодъ на 7, мы должны получить приближеніе къ $\frac{7}{7}$ т. е. къ 1, и дѣйствительно:

$$\begin{array}{r} 0{,}142857\ldots\ldots \\ 7 \\ \hline 0{,}999999\ldots\ldots \end{array}$$

Умножая тотъ-же періодъ на число большее 7, напримѣръ на 23 получимъ

$$\begin{array}{r} 0{,}142857 \\ 23 \\ \hline 428571 \\ 285714 \\ \hline 3285711 \end{array}$$

Отсчитавъ съ правой стороны шесть знаковъ, будемъ имѣть 3,285711; если теперь полученную цифру цѣлыхъ чиселъ сложимъ съ послѣдней цыфрой періода, то получимъ тотъ-же періодъ, какъ отъ $\frac{2}{7}$, т.е. 0,285714, потому что $\frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$. Итакъ, въ періодѣ отъ знаменаеля 7, безразлично при какомъ числителѣ, первая половина періода плюсъ вторая половина = 999. Напишемъ теперь рядъ числителей въ послѣдовательности, соотвѣтствующей цифрамъ получаемаго отъ нихъ періода. Такъ какъ послѣдовательность цифръ въ періодѣ не измѣняется, то и послѣдовательность въ ряду числителей остается постоянной, по этому безразлично какой періодъ взять для составленія послѣдовательнаго ряда числителей. Возьмемъ періодъ 571428. Этотъ періодъ получился отъ $\frac{4}{7}$; періодъ, начинающійся съ семи, получается отъ $\frac{5}{7}$, съ единицы — отъ $\frac{1}{7}$; съ 4—отъ $\frac{3}{7}$; съ 2–отъ $\frac{2}{7}$ и—наконецъ, періодъ 857142, получился отъ $\frac{6}{7}$. Послѣдовательный рядъ числителей будетъ: 4, 5, 1, 3, 2, 6. Если мы сложимъ перваго числителя съ четвертымъ, второго съ пятымъ и третьяго съ шестымъ, то получимъ 777, т. е. *знаменателя, повтореннаго* столько разъ, сколько въ періодѣ цифръ,

дѣленное на 2. Для большей наглядности расположимъ какъ цифры періода, такъ и рядъ соотвѣтствующихъ числителей въ циклическомъ порядкѣ (фиг. I). Наружный рядъ круга изображаетъ числителей, а внутренній періодическую дробь, при-томъ каждый числитель поставленъ надъ той цифрой, съ которой начинается періодъ при данномъ числителѣ. Такъ: числитель 1 подъ нимъ періодъ начинается съ 1 и идетъ, далѣе 42857; слѣдующій числитель 3, его періодъ будетъ 428571; періодъ отъ $\frac{6}{7}$ будетъ 857142 и. т. д; на этой фигурѣ ясно видно, что сумма противулежащихъ цифръ внутренняго круга всегда ровна 9, а сумма противулежащихъ числителей всегда равна знаменателю, въ нашемъ случаѣ 7.



Фиг. 1.

Теперь посмотримъ, сохраняется-ли тотъ же законъ для дробей съ знаменателями другихъ первоначальныхъ чиселъ.

Слѣдующее первоначальное число послѣ 7 будетъ 11. Дробь съ знаменателемъ 11 можетъ имѣть 10 различныхъ числителей, а слѣдовательно, мы должны получить въ періодѣ 10 цифръ. Начнемъ съ $\frac{1}{11}$

$$\begin{array}{l} 100:11=0{,}09\ldots\ldots\ldots \\ \underline{\ 99\ } \\ \quad 1 \end{array}$$

мы получили въ періодѣ только два знака, а потому мы должны получить пять различныхъ періодовъ, и каждый періодъ будетъ служить только двумъ числителямъ. Продолжаемъ анализъ:

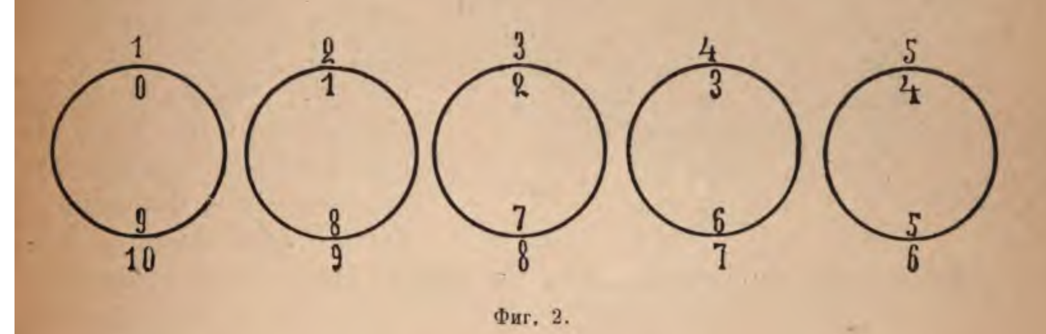
$$\begin{array}{llll} 20:11=0{,}18\ldots; & 30:11=0{,}27\ldots. & 40:11=0{,}36 & 50=0{,}45\ldots\ldots \\ \underline{11} & \underline{22} & \underline{33} & \underline{44} \\ \ \ 90 & \ \ 80 & \ \ 70 & \ \ 60 \\ \ \ \underline{88} & \ \ \underline{77} & \ \ \underline{66} & \ \ \underline{55} \\ \ \ \ \ 2 & \ \ \ \ 3 & \ \ \ \ 4 & \ \ \ \ 5 \end{array}$$

Затѣмъ $\frac{6}{11}$ дадутъ такой же періодъ только съ перестановкой цифръ, т. е. 0,54...... и. т. д. Расположимъ снова числа кружками, получимъ (фиг. 2). Мы и здѣсь видимъ, что противолежащія цыфры внутри круга даютъ въ суммѣ 9, а внѣ круга 11, т. е. знаменателя.

Теперь посмотримъ, какіе періоды даетъ намъ знаменатель 13, начнемъ съ $\frac{1}{13}$.

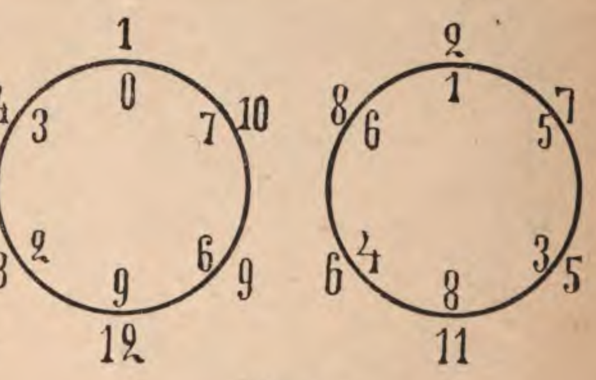
100:13 = 0,076923....
91
90
78
120
117
30
26
40
39
1

Періодъ кончился, но онъ имѣетъ только 6 цифръ, вмѣсто 12, очевидно, что долженъ быть второй періодъ, притомъ для такихъ числителей, которые не даютъ найденнаго періода. Легко понять, что остатки, получаемые при дѣленіи, и суть тѣ числители, которыхъ періодъ начинается съ слѣдующей цыфры частнаго. Такъ: дѣля 1 на тринадцать, получаемъ 0 цѣлыхъ; прибавляя къ ней 0 первая цыфра періода будетъ 0, а остатокъ 10; этотъ остатокъ выражаетъ числителя, котораго періодъ начнется съ цифры 7, такъ какъ



Фиг. 2.

100:13 = 7, а остатокъ 9 будетъ числителемъ, котораго періодъ начнется съ 6 и т. д. Поэтому мы можемъ сказать, что нашъ періодъ будетъ для слѣдующихъ дробей $\frac{1}{13}, \frac{10}{13}, \frac{9}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13},$ и $\frac{4}{13},$ для числителей же 2, 7, 5, 11, 6, 8 долженъ быть другой періодъ; но такъ какъ $\frac{2}{13}$ въ два раза болѣе $\frac{1}{13},$ то и періодъ отъ $\frac{2}{13}$ долженъ быть вдвое болѣе чѣмъ 076923, т. е. $=0,153846$. Расположимъ



Фиг. 3.

полученныя числа въ циклическомъ порядкѣ (фиг. 3). Получимъ два круга, въ которыхъ опять таки—сумма внутреннихъ противолежащихъ чиселъ = 9, а сумма внѣшнихъ знаменателю 13.

Слѣдующее первоначальное число 17. Дроби съ этимъ знаменателемъ, приведенныя въ десятичныя дроби, должны дать въ періодѣ 16 знаковъ. Но мы уже знаемъ, что достаточно найти половину знаковъ, другія же цифры періода будутъ дополнительными до 9 къ найденнымъ цифрамъ. Замѣтимъ еще одну особенность періода: мы можемъ найти его не только чрезъ дѣленіе, но и чрезъ умноженіе. Положимъ, что мы хотимъ найти періодъ отъ знаменателя 17. Мы видѣли, что періодъ, помноженный на знаменателя, отъ котораго онъ произошелъ, даетъ въ произведеніи 9, повторенное столько разъ, сколько знаковъ въ періодѣ; слѣдовательно, мы можемъ написать 17 производителемъ, т. е. множителемъ, и пріискивать цифры множимаго (начиная съ единицъ), такъ, чтобы въ произведеніи получались однѣ девятки. Итакъ мы пишемъ

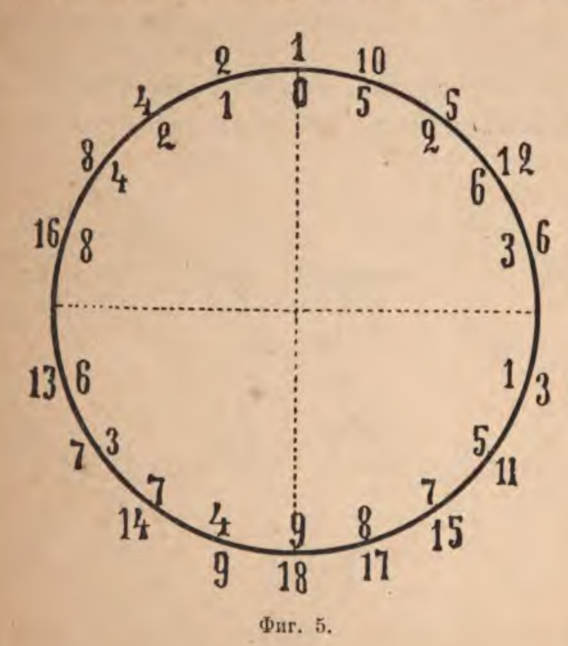


Фиг. 4.

$\underline{\quad 17 \quad}$ первая цифра періода съ правой стороны должна быть 7 потому, что только 7 въ произведеніи съ 17 дастъ 9 единицъ, пишемъ:

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{17} \\ 119 \end{array}$$

Для отысканія второй цифры, намъ нужно взять цифру дающую въ произведеніи съ 17 только 8 единицъ, такъ какъ мы имѣемъ уже одну единицу на второмъ мѣстѣ; эта цифра будетъ 4, и мы получимъ:



Фиг. 5.

47
17
———
119
68.

Теперь мы имѣемъ на третьемъ мѣстѣ 7 единицъ и мы должны для третьей цифры взять число, дающее въ произведеніи съ 17 только 2 единицы — это 6, продолжая наше дѣйствіе такимъ образомъ, получаемъ:

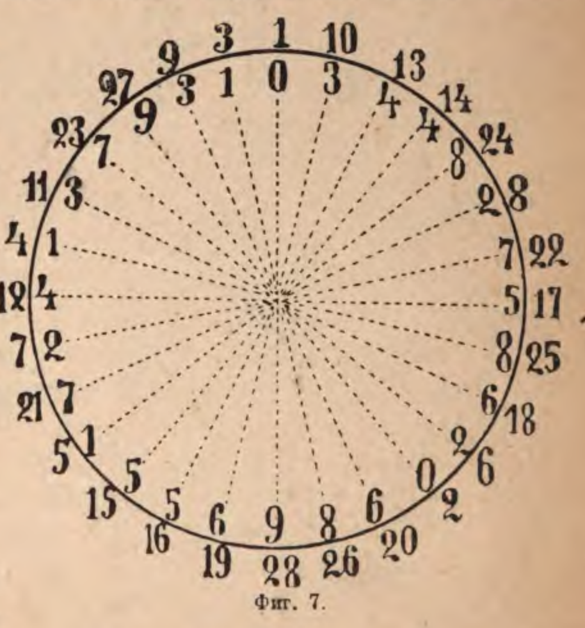
```
    94117647
          17
  ----------
  1561110119
    3811968
      77 2
```



Фиг. 6.

Далѣе продолжать незачѣмъ, такъ какъ мы нашли половину періода, т. е. 8 цифръ, остальныя будутъ къ нимъ дополнительныя до 9, и мы получаемъ весь періодъ = 0,0588235294117647. Хотя мы при этомъ способѣ нахожденія общаго періода для всѣхъ числителей и не получаемъ прямо соотвѣтствующихъ числителей, но ихъ не трудно найти; въ самомъ дѣлѣ: наименьшая десятичная дробь соотвѣтствуетъ наименьшему числителю (при томъ же знаменателѣ), поэтому въ нашемъ случаѣ числитель единица будетъ имѣть періодъ 0,058 и т.д.

числит.	2	„	0,117	„
„	3	„	0,176	„
„	4	„	0,235	„
„	5	„	0,294	„



Фиг. 7.

какъ это изображено на фиг. 4. Совершенно тѣмъ же законамъ подлежатъ дроби $\frac{x}{19}$ фиг. 5; $\frac{x}{23}$ фиг. 6; $\frac{x}{29}$ фиг. 7.

Но вотъ мы получаемъ нѣкоторое отступленіе отъ этого закона въ дроби $\frac{x}{31}$;



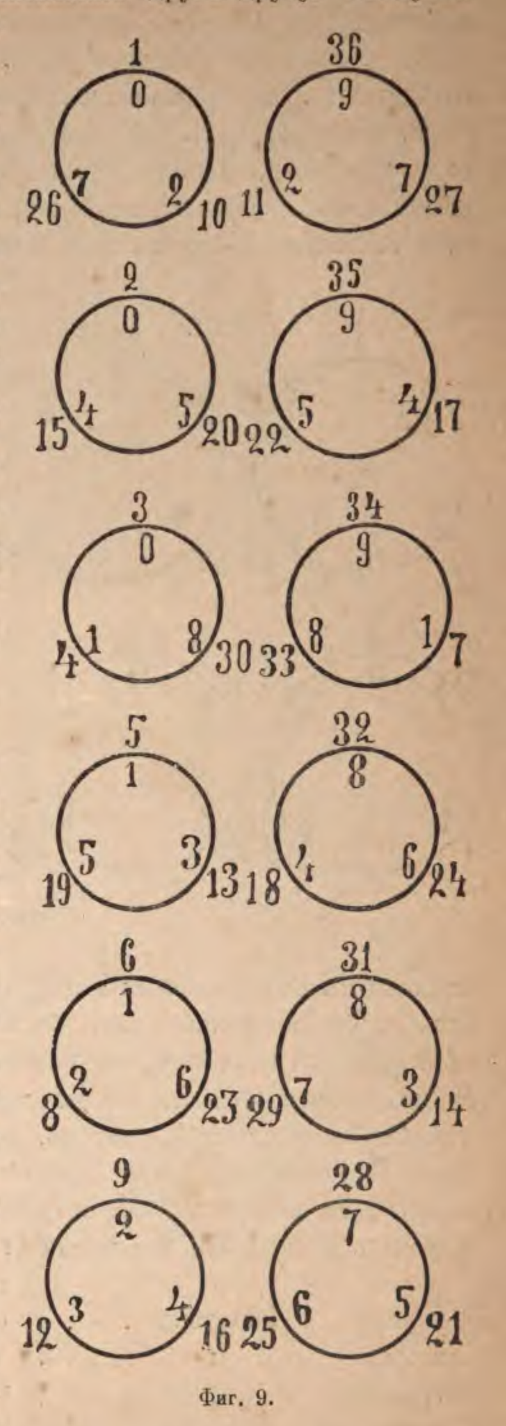
Фиг. 8, а.

Фиг. 8, б.

Періодъ кончился. Въ немъ 15 цифръ, слѣдовательно, будетъ еще одинъ періодъ съ 15 знаками. Такъ какъ въ числѣ остатковъ была цифра 2, но не было 3, то ясно, что для числителя три и для другихъ числителей, не имѣющихся въ остаткахъ нашего дѣленія, будетъ періодъ 0,032258064516129 × × 3 = 0,967741935483387.

Расположивъ періоды, а равно и соотвѣтствущіе числители въ двухъ *кружкахъ (фиг. 8)* замѣтимъ, что такъ какъ число 15 нечетное, то

цифры въ кругѣ не будутъ противолежать другъ другу. Слѣдуетъ замѣтить, что въ подобныхъ случаяхъ цифры одного кружка съ соотвѣтствующими по своему положенію цифрами другого кружка играютъ ту же роль, какую играютъ противолежащія числа въ циклахъ съ четнымъ числомъ цифръ періода, т. е. что ихъ сумма = 9, а сумма числителя одного кружка съ числителемъ, лежащимъ на соотвѣтствующемъ мѣстѣ другого кружка, равна знаменателю, въ нашемъ случаѣ = 31. Этотъ законъ остается вѣрнымъ для всѣхъ случаевъ, въ которыхъ число цифръ въ періодахъ нечетное; выводъ этотъ подтверждается слѣдующими дробями: $\frac{x}{37}$ (фиг. 9); $\frac{x}{41}$ (фиг. 10); $\frac{x}{43}$ (фиг. 11). Въ первыхъ двухъ случаяхъ мы расположили кружки параллельно такъ, чтобы дополнительные кружки лежали другъ противъ друга. Въ послѣднемъ случаѣ мы имѣемъ только два періода, но въ каждомъ изъ нихъ тоже нечетное (21) число знаковъ. Для большей наглядности мы изобразили здѣсь (фиг. 11) на одномъ кругѣ оба періода такъ, что верхніе числители соотвѣтствуютъ внутреннему періоду, а средніе числители среднему періоду. Сумма двухъ другъ съ другомъ лежащихъ числителей ровна 43, т. е. знаменателю нашей дроби, а сумма двухъ цифръ соотвѣтствующихъ періодовъ = 9. Слѣдующее первоначальное число будетъ 47. Мы не можемъ предвидѣть, сколько періодовъ будетъ имѣть этотъ знаменатель,



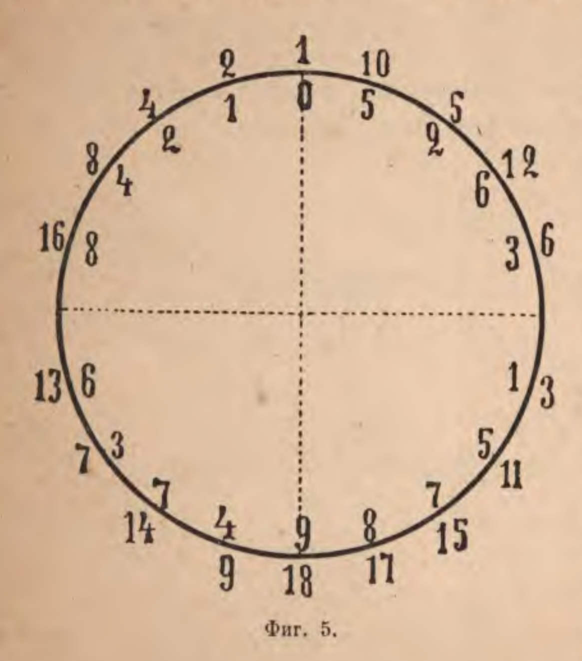
Фиг. 9.

Слѣдующее первоначальное число 17. Дроби съ этимъ знаменателемъ, приведенныя въ десятичныя дроби, должны дать въ періодѣ 16 знаковъ.



Фиг. 4.

Но мы уже знаемъ, что достаточно найти половину знаковъ, другія же цифры періода будутъ дополнительными до 9 къ найденнымъ цифрамъ. Замѣтимъ еще одну особенность періода: мы можемъ найти его не только чрезъ дѣленіе, но и чрезъ умноженіе. Положимъ, что мы хотимъ найти періодъ отъ знаменателя 17. Мы видѣли, что періодъ, помноженный на знаменателя, отъ котораго онъ произошелъ, дастъ въ произведеніи 9, повторенное столько разъ, сколько знаковъ въ періодѣ; слѣдовательно, мы можемъ написать 17 производителемъ, т. е. множителемъ, и пріискивать цифры множимаго (начиная съ единицъ), такъ, чтобы въ произведеніи получались однѣ девятки.



Фиг. 5.

Итакъ мы пишемъ $\frac{}{17}$ первая цифра періода съ правой стороны должна быть 7 потому, что только 7 въ произведеніи съ 17 дастъ 9 единицъ, пишемъ: $\begin{array}{r} 7 \\ 17 \\ \hline 119 \end{array}$ Для отысканія второй цифры, намъ нужно взять цифру дающую въ произведеніи съ 17 только 8 единицъ, такъ какъ мы имѣемъ уже одну единицу *на второмъ* мѣстѣ; эта цифра будетъ 4, и мы получимъ:

47
17 Теперь мы имѣемъ на третьемъ мѣстѣ 7 единицъ и мы
119
68.

должны для третьей цифры взять число, дающее въ произведенiи съ 17 только 2 единицы — это 6, продолжая наше дѣйствiе такимъ образомъ, получаемъ:

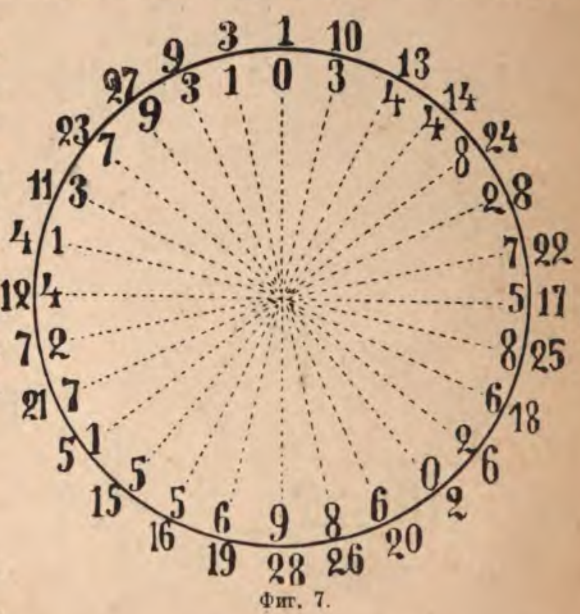
94117647
17
1561110119
3811968
77 2

Далѣе продолжать незачѣмъ, такъ какъ мы нашли половину перiода, т. е. 8 цифръ, остальныя будутъ къ нимъ дополнительныя до 9, и мы получаемъ весь перiодъ = 0,0588235294117647. Хотя мы при этомъ способѣ нахожденiя общаго перiода для всѣхъ числителей и не получаемъ прямо соотвѣтствующихъ числителей, но ихъ не трудно найти; въ самомъ дѣлѣ: наименьшая десятичная дробь соотвѣтствуетъ наименьшему числителю (при томъ же знаменателѣ), поэтому въ нашемъ случаѣ числитель единица будетъ имѣть



Фиг. 6.

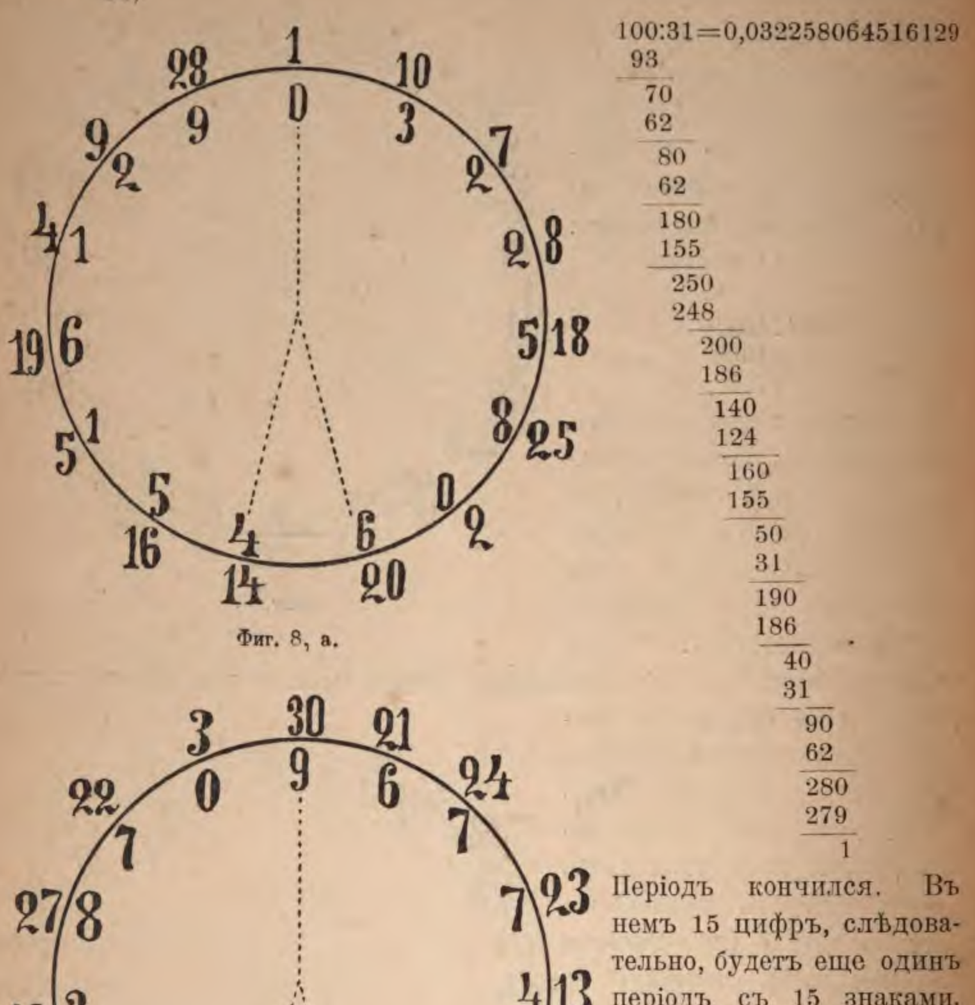
		перiодъ	0,058 и т. д.
числит.	2	„	0,117 „
„	3	„	0,176 „
„	4	„	0,235 „
„	5	„	0,294 „



Фиг. 7.

какъ это изображено на фиг. 4. Совершенно тѣмъ же законамъ подлежатъ дроби $\frac{x}{19}$ фиг. 5; $\frac{x}{23}$ фиг. 6; $\frac{x}{29}$ фиг. 7.

Но вотъ мы получаемъ нѣкоторое отступленіе отъ этого закона въ дроби $\frac{x}{31}$;



Фиг. 8, а.

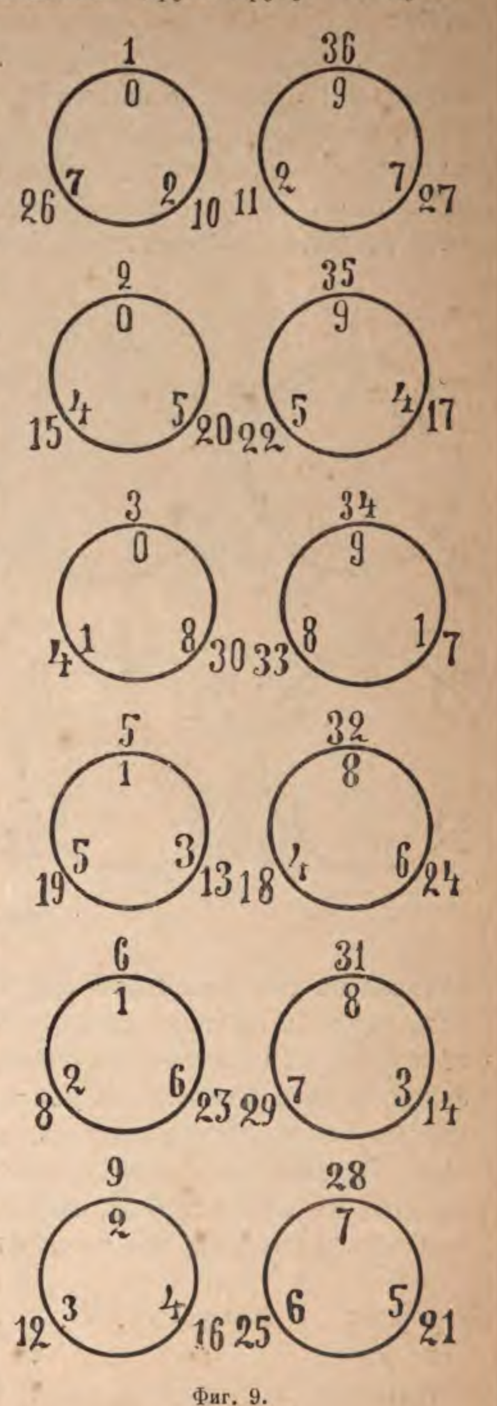
Фиг. 8, б.

```
100:31=0,032258064516129
 93
  70
  62
   80
   62
   180
   155
    250
    248
      200
      186
       140
       124
        160
        155
          50
          31
          190
          186
           40
           31
            90
            62
            280
            279
              1
```

Періодъ кончился. Въ немъ 15 цифръ, слѣдовательно, будетъ еще одинъ періодъ съ 15 знаками. Такъ какъ въ числѣ остатковъ была цифра 2, но не было 3, то ясно, что для числителя три и для другихъ числителей, не имѣющихся въ остаткахъ нашего дѣленія, будетъ періодъ 0,032258064516129 × × 3 = 0,96774193548387.

Расположивъ періоды, а равно и соотвѣтствущіе числители въ двухъ *кружкахъ (фиг. 8)* замѣтимъ, что такъ какъ число 15 нечетное, то

цифры въ кругѣ не будутъ противолежать другъ другу. Слѣдуетъ замѣтить, что въ подобныхъ случаяхъ цифры одного кружка съ соотвѣтствующими по своему положенію цифрами другого кружка играютъ ту же роль, какую играютъ противолежащія числа въ циклахъ съ четнымъ числомъ цифръ періода, т. е. что ихъ сумма = 9, а сумма числителя одного кружка съ числителемъ, лежащимъ на соотвѣтствующемъ мѣстѣ другого кружка, равна знаменателю, въ нашемъ случаѣ = 31. Этотъ законъ остается вѣрнымъ для всѣхъ случаевъ, въ которыхъ число цифръ въ періодахъ нечетное; выводъ этотъ подтверждается слѣдующими дробями: $\frac{x}{37}$ (фиг. 9); $\frac{x}{41}$ (фиг. 10); $\frac{x}{43}$ (фиг. 11). Въ первыхъ двухъ случаяхъ мы расположили кружки параллельно такъ, чтобы дополнительные кружки лежали другъ противъ друга. Въ послѣднемъ случаѣ мы имѣемъ только два періода, но въ каждомъ изъ нихъ тоже нечетное (21) число знаковъ. Для большей наглядности мы изобразили здѣсь (фиг. 11) на одномъ кругѣ оба періода такъ, что верхніе числители соотвѣтствуютъ внутреннему періоду, а среднія числители среднему періоду. Сумма двухъ другъ съ другомъ лежащихъ числителей ровна 43, т. е. знаменателю нашей дроби, а сумма двухъ цифръ соотвѣтствующихъ періодовъ = 9. Слѣдующее первоначальное число будетъ 47. Мы не можемъ предвидѣть, сколько періодовъ будетъ имѣть этотъ знаменатель,



Фиг. 9.

Слѣдующее первоначальное число 17. Дроби съ этимъ знаменателемъ, приведенныя въ десятичныя дроби, должны дать въ періодѣ 16 знаковъ. Но мы уже знаемъ, что достаточно найти половину знаковъ, другія же цифры періода будутъ дополнительными до 9 къ найденнымъ цифрамъ. Замѣтимъ еще одну особенность періода: мы можемъ найти его не только чрезъ дѣленіе, но и чрезъ умноженіе. Положимъ, что мы хотимъ найти періодъ отъ знаменателя 17. Мы видѣли, что періодъ, помноженный на знаменателя, отъ котораго онъ произошелъ, даетъ въ произведеніи 9, повторенное столько разъ, сколько знаковъ въ періодѣ; слѣдовательно, мы можемъ написать 17 производителемъ, т. е. множителемъ, и пріискивать цифры множимаго (начиная съ единицъ), такъ, чтобы въ произведеніи получались однѣ девятки. Итакъ мы пишемъ

$$\frac{\quad 17 \quad}{}$$

первая цифра періода съ правой стороны должна быть 7 потому, что только 7 въ произведеніи съ 17 дастъ 9 единицъ, пишемъ:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 17 \\ \hline 119 \end{array}$$

Для отысканія второй цифры, намъ нужно взять цифру дающую въ произведеніи съ 17 только 8 единицъ, такъ какъ мы имѣемъ уже одну единицу *на второмъ* мѣстѣ; эта цифра будетъ 4, и мы получимъ:



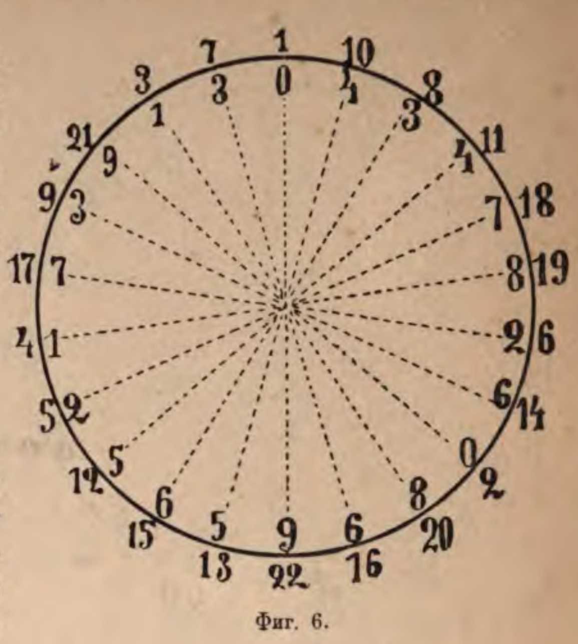
Фиг. 4.



Фиг. 5.

47
17 Теперь мы имѣемъ на третьемъ мѣстѣ 7 единицъ и мы
119
68.
должны для третьей цифры взять число, дающее въ произведенiи съ 17 только 2 единицы — это 6, продолжая наше дѣйствiе такимъ образомъ, получаемъ:

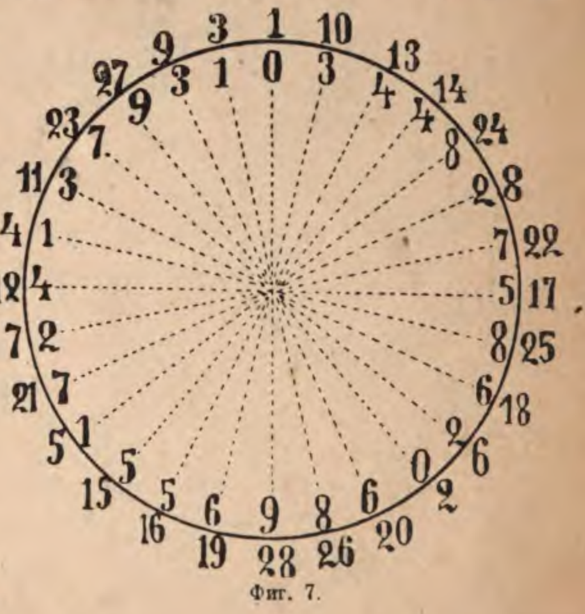
```
94117647
      17
1561110119
 3811968
  77 2
```



Фиг. 6.

Далѣе продолжать незачѣмъ, такъ какъ мы нашли половину періода, т. е. 8 цифръ, остальныя будутъ къ нимъ дополнительныя до 9, и мы получаемъ весь періодъ = 0,0588235294117647. Хотя мы при этомъ способѣ нахожденія общаго періода для всѣхъ числителей и не получаемъ прямо соотвѣтствующихъ числителей, но ихъ не трудно найти; въ самомъ дѣлѣ: наименьшая десятичная дробь соотвѣтствуетъ наименьшему числителю (при томъ же знаменателѣ), поэтому въ нашемъ случаѣ числитель единица будетъ имѣть періодъ 0,058 и т.д.

числит.	2	„	0,117	„
„	3	„	0,176	„
„	4	„	0,235	„
„	5	„	0,294	„



Фиг. 7.

какъ это изображено на фиг. 4. Совершенно тѣмъ же законамъ подлежатъ дроби $\frac{x}{19}$ фиг. 5; $\frac{x}{23}$ фиг. 6; $\frac{x}{29}$ фиг. 7.

полнительныя цыфры; слѣдовательно, имѣемъ отъ знаменателя 97 одинъ періодъ, который и нашли легкимъ способомъ.

Какъ легко находить этимъ способомъ большіе періоды, видно изъ слѣдующаго примѣра: 1 : 127=0,007874

остатки 10
„ 100
„ 111
„ 94
„ 51
„ 2 Не продолжая дѣленія мы множимъ полученное частное 0,007874 на два, т. е. на послѣдній остатокъ.

```
      2
0,015748   это произведеніе снова множимъ на 2 и т. д.
      2
0,031496
      2
0,062|992
```

Такъ какъ начались дополнительныя цифры то весь періодъ будетъ 0,007874015748031496062 | 992125984251968503937 въ немъ 42 знака слѣдовательно въ немъ будетъ $\frac{126}{42}=3$ періода. Такъ какъ въ 42 остаткахъ не встрѣчается ни 3, ни 11, то, умноживши найденный періодъ на 3 и на 11, мы получимъ остальные два періода.

Мы не хотимъ приводить всѣ примѣры нами изслѣдованныхъ дробей съ первоначальными числами въ знаменателѣ, такъ какъ всѣ они приводятъ насъ къ тому же выводу, но мы прилагаемъ здѣсь списокъ того числа періодовъ, которые даютъ дроби съ первоначальными знаменателями отъ 3 до 127.

Знаменатели дробей.	Число періодовъ.	Знаменатели дробей	Число періодовъ.
3	2	59	1
7	1	61	1
11	5	67	2
13	2	71	2
17	1	79	6
19	1	83	2
23	1	89	2
29	1	97	1
31	2	101	25
37	12	103	3
41	8	107	2
43	2	113	1
47	1	127	3

Изъ этого списка видно, что число періодовъ для разныхъ первоначальныхъ чиселъ различно и не поддается, повидимому, никакому закону, по которому можно было бы заранѣе опредѣлить, сколько періодовъ получится отъ даннаго числа.

До сихъ поръ мы приводили въ десятичныя дроби только такія дроби, знаменатели которыхъ первоначальныя числа, и пришли къ слѣдующимъ выводамъ:

1) Дроби съ первоначальнымъ числомъ въ знаменателѣ (исключая 2 и 5), при обращеніи въ десятичныя, могутъ дать или одинъ періодъ для всѣхъ числителей, или нѣсколько періодовъ; въ этомъ случаѣ число цифръ во всѣхъ періодахъ одинаково.
2) Число цифръ въ періодѣ, или сумма цифръ во всѣхъ періодахъ (при нѣсколькихъ періодахъ), всегда равно знаменателю безъ единицы. Слѣдовательно оно всегда четное, такъ какъ первоначальное число всегда нечетное.
3) При одномъ періодѣ, цифры второй половины періода будутъ дополнительными до 9 къ цифрамъ первой половины періода, а сумма соотвѣтствующихъ числителей равна знаменателю той дроби, отъ которой произошелъ періодъ.
4) При двухъ, четырехъ, шести и болѣе періодахъ, но всегда при четномъ числѣ ихъ, можетъ случиться, что въ этихъ періодахъ будетъ нечетное число цифръ. Напримѣръ: знаменатель 31 (фиг. 8) даетъ два періода, слѣдовательно въ каждомъ періодѣ будетъ $\frac{30}{2} = 15$ знаковъ; въ этихъ случаяхъ цифры втораго періода будутъ дополнительнымъ до 9 къ цифрамъ перваго періода, а сумма соотвѣтствующихъ числителей будетъ$=31$, т. е. данному знаменателю; то же въ фиг. 9, 10, 11, 12 и проч. при нечетномъ количествѣ періодовъ число цифръ въ каждомъ періодѣ всегда четное.
5) Если умножить періодъ на число меньшее чѣмъ знаменатель (т. е. дѣлитель, отъ котораго онъ произошелъ), то въ произведеніи получаются тѣ же цифры и въ томъ же порядкѣ, лишь съ другимъ началомъ періода; если же умножить его на число равное знаменателю, то въ произведеніи получается столько разъ 9, сколько знаковъ въ періодѣ, т. е. приближеніе къ единицѣ.
6) При отыскиваніи большихъ періодовъ, можно дѣленіе замѣнить умноженіемъ нѣсколькихъ, уже найденныхъ, цифръ частнаго на послѣдній остатокъ.
7) Сумма всѣхъ цифръ въ періодѣ всегда равна произведенію девяти на число цифръ, дѣленное на два.

Теперь займемся обращеніемъ въ десятичныя такихъ дробей, у ко-

торыхъ знаменатель не простое число, но не содержитъ производителей 2 или 5. Начнемъ съ простѣйшихъ случаевъ: $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{21}$; $\frac{1}{33}$; $\frac{1}{39}$ и т. д.

1 : 9=0,1...; 2 : 9=0,2 и т. д. Отсюда ясно, что мы для восьми числителей получимъ восемь различныхъ періодовъ; при чемъ періодомъ будетъ цифра числителя.

1:21 = 0,047619

Остатки 10
„ 16
„ 13
„ 4
„ 19
„ 1

Періодъ кончился, въ немъ оказалось 6 цифръ. Такъ какъ намъ извѣстно, что число цифръ во всѣхъ періодахъ должно равняться 20, а полученный періодъ имѣетъ шесть только знаковъ, то должны быть еще періоды. Принявъ въ соображеніе, что числители, кратные 21, сокращаютъ дробь, обращая ея знаменателя въ 3, или 7, мы должны исключить этихъ числителей, потому что для нихъ будутъ періоды простыхъ чиселъ. Такъ; для числителей 3, 6, 9, 12, 15 и 18 періодъ будетъ такой, какой получается отъ знаменателя 7 т. е. 142857; а для числителей 7 и 14 будутъ періоды 0,3..... и 0,6..... т. е. какъ отъ знаменателя 3. Намъ, слѣдовательно, остается найти періодъ числителей: 2, 5, 8 11, 17 и 20. Этотъ періодъ очевидно будетъ вдвое болѣе найденнаго, т. е. 0.047619×2=0,095238. Итакъ, мы имѣемъ три періода по шести знаковъ и два періода по одному знаку, въ суммѣ 20 цифръ. Замѣтимъ еще: періодъ при числителѣ 1 равенъ 0,047619, дополнительное (къ знаменателю) число 20 имѣетъ періодъ 0,952380 т. е. дополнительные цифры (до 9) къ первому періоду, а въ періодѣ 142857 который не имѣетъ себѣ парнаго періода, первые три знака дополнительные къ послѣднимъ тремъ, т. е. то-же, что при дробяхъ съ первоначальными знаменателями, только періоды отъ сложнаго знаменателя не всѣ имѣютъ равное число цифръ.

Перейдемъ къ $\frac{x}{33}$

1 : 33=0,03..... 2 : 33=0,06

Остатокъ 10 Остатокъ 20
„ 1 „ 2

3 : 33=1 : 11=0,09 т. е. періодъ 11 (см. фиг. II и всѣ числители, кратные тремъ, дадутъ тотъ-же періодъ; таковыхъ будетъ десять; а кратные 11 т. е. 11 и 22 дадутъ: перв. 0,3.. втор. 0,6...; исключивъ эти 12 числителей изъ 32 получимъ 20, а такъ какъ въ каждомъ періодѣ два знака, то остальныхъ періодовъ будетъ 10.

Дробь $\frac{x}{39}=\frac{x}{3.13}$ числителей кратныхъ тремъ будетъ двѣнадцать, а

кратныхъ 13—два. Первые дадутъ періодъ отъ 13 (см. фиг. III.), а послѣдніе отъ трехъ, т. е. 0,3... и 0, 6..... Исключивъ изъ 38 четырнадцать, получимъ 24. Теперь приведемъ въ десятичную дробь $\frac{1}{39}$.

1 : 39 = 0,025641.....

Остатки 10
„ 22
„ 25
„ 16
„ 4
„ 1

Такъ какъ періодъ кончился шестью знаками, то всѣхъ періодовъ будетъ $\frac{24}{6} = 4$ для числителей некратныхъ знаменателю. Періоды эти слѣдующіе:

0,025641... 0,051282...
0,974358.... 0,948717...

Мы и здѣсь видимъ, что цифры нижняго ряда дополняютъ (до 9) цифры верхняго ряда; и здѣсь число цифръ всѣхъ періодовъ равно знаменателю безъ единицы, но число цифръ въ самихъ періодахъ и здѣсь различно; только періоды отъ числителей некратныхъ знаменателю имѣютъ всегда ровное число знаковъ.

Разсмотримъ $\frac{x}{49}$.

1 : 49=0,020408163265306122448897

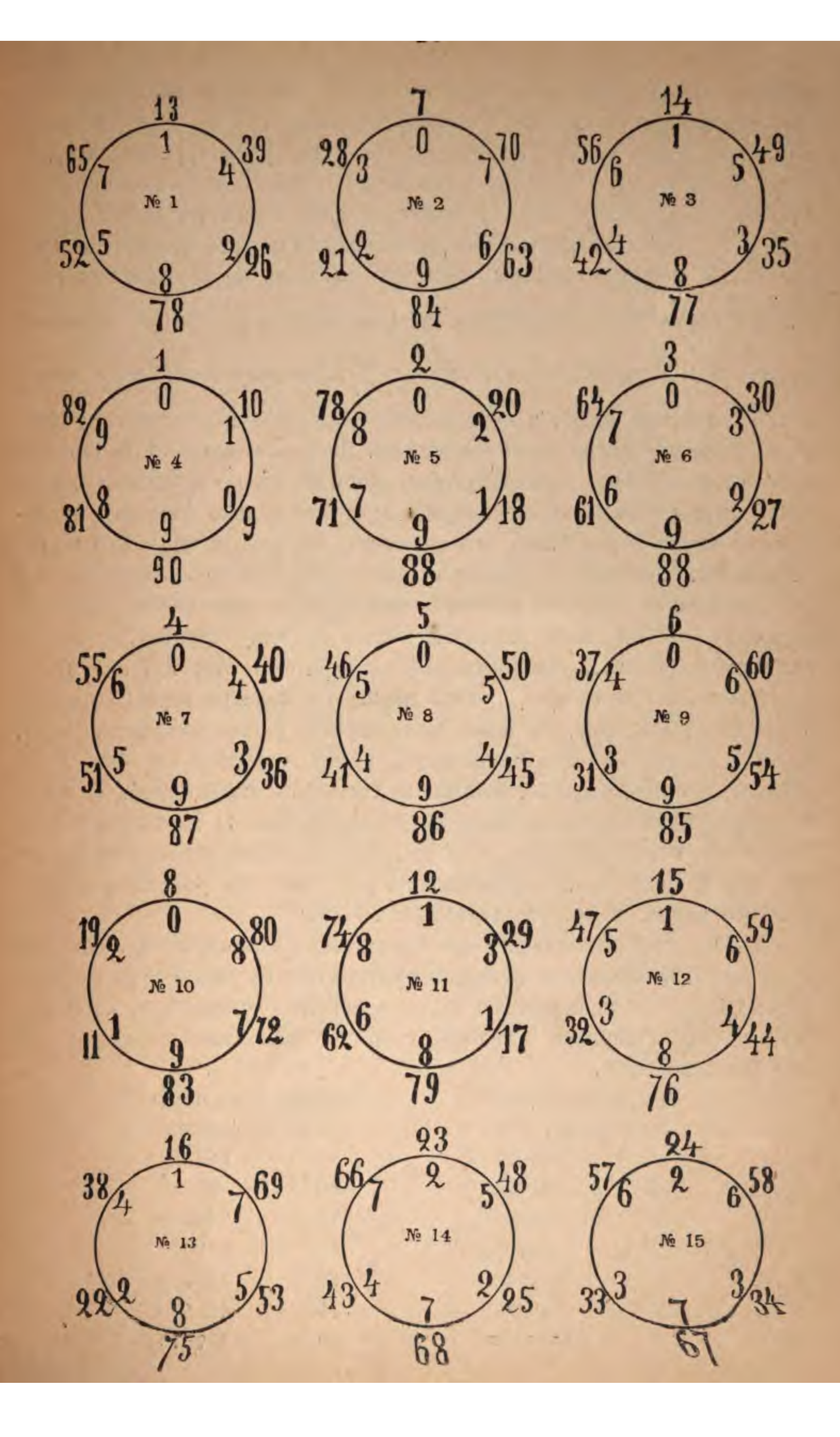
Остатки 10
„ 2
„ 4
„ 8
„ 31
„ 16
„ 13
„ 32
„ 26
„ 15
„ 3
„ 6
„ 11
„ 12
„ 22
„ 24
„ 48
„ 44
„ 48
„ 39

Исключивъ числителей кратныхъ 7, ихъ будетъ шесть, остается 48—6=42 знака. Въ виду того, что періодъ не кончился, и мы уже получили дѣленіемъ 21 знакъ, т. е. половину всѣхъ цифръ, могущихъ быть въ періодѣ, мы заключаемъ, что остальныя цифры будутъ дополнительныя къ найденнымъ. Для числителей же, кратныхъ семи, періодъ будетъ 142857 (см. фиг. I). Изъ этихъ примѣровъ мы видимъ, что при обращеніи дроби со знаменателями, хотя бы и не первоначальныхъ чиселъ, но не содержащихъ производителей 2 и 5, мы получаемъ періоды съ тѣми же свойствами, какъ и отъ знаменателей съ простыми числами; съ тою разницей, что въ этихъ случаяхъ для числителей, кратныхъ знаменателю, получаются періоды, какъ отъ сокращенной дроби. Такъ, при знаменателѣ 21 числители 3, 6, 9, 12, 15 и 18 сократятъ дробь до $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, и $\frac{6}{7}$, и періодъ получится, какъ отъ первоначальнаго числа 7.

Поэтому, имѣя напримѣръ дробь $\frac{x}{69}$ мы разсуждаемъ такъ: число знаковъ въ періодахъ должно равняться 68, но 69 состоитъ изъ 23×3, слѣдовательно, числителей кратныхъ 23 будетъ два, кратныхъ тремъ—22. Вычитая изъ 68—24, получимъ 44 знака для остальныхъ числителей; такъ какъ 44 не дѣлится на три, то мы можемъ имѣть одинъ, два, четыре или 11 періодовъ; если послѣ четырехъ цыфръ въ частномъ не получается въ остаткѣ дѣлимое, то надо смотрѣть не получится—ли оно послѣ одиннадцати знаковъ; если и тогда не получается періодъ, то продолжаемъ дѣленіе до 22 знаковъ, послѣ чего дѣленіе продолжать не придется, такъ какъ слѣдующія цифры будутъ или дополнительными до 9 къ первымъ найденнымъ цифрамъ (при одномъ періодѣ), или же пойдетъ повтореніе тѣхъ же цифръ (при двухъ періодахъ). Въ послѣднемъ случаѣ второй періодъ найдется чрезъ умноженіе перваго на два. Въ нашемъ случаѣ будетъ одинъ періодъ. Вотъ онъ: 0,0204081632653061224 48 || 979591 и т. д. для числителей кратныхъ 23, т. е. для 23 и 46, будутъ періоды: для перваго 0,3 для второго 0,6.., а для числителей кратныхъ 3 (см. фиг. VI) —періодъ отъ $\frac{x}{23}$.

Можно бы этими примѣрами закончить, но приведемъ еще одинъ оригинальный случай приведенія въ десятичную дробь $\frac{x}{91}$; знаменатель состоитъ изъ 7×13, слѣдовательно для числителей 13, 26, 39, 52, 65 и 78 (фиг. 13, кружекъ 1) будутъ періоды, соотвѣтствующіе знаменателю 7 (см. фиг. I); и для числителей 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77 и 84 (фиг. 13, кружки 2 и 3) будутъ два періода, соотвѣтствующіе знаменателю 13 (см. фиг. III). Исключивъ эти 18 числителей изъ 90, получаемъ 72 числителя, которые имѣютъ 12 періодовъ по 6 знаковъ. Итакъ мы имѣемъ 15 періодовъ всѣ по 6 цифръ въ періодѣ. Всѣ періоды и соотвѣтствующіе имъ числители, будучи расположены въ циклическомъ порядкѣ, подчиняются выведенному нами закону.

Но вотъ особенности знаменателя 91. Если мы сравнимъ 1-й кружокъ съ 13-мъ; второй съ 6; третій съ 12-мъ; пятый съ 10-мъ и седьмой съ 9, то замѣтимъ, что цифры періодовъ въ каждой парѣ перечисленныхъ кружковъ однѣ и тѣ же, но расположены въ обратную сторону. Такъ напримѣръ: въ первомъ кружкѣ отъ дроби $\frac{13}{91}$ получается періодъ 142857; въ 13-мъ кружкѣ отъ дроби $\frac{69}{91}$ получаемъ обратный періодъ


№ 1: 13, 39, 26, 78, 52, 65; 1, 4, 2, 8, 5, 7
№ 2: 7, 70, 63, 84, 21, 28; 0, 7, 6, 9, 2, 3
№ 3: 14, 49, 35, 77, 42, 56; 1, 5, 3, 8, 4, 6
№ 4: 1, 10, 9, 90, 81, 82; 0, 1, 0, 9, 8, 9
№ 5: 2, 20, 18, 88, 71, 78; 0, 2, 1, 9, 7, 8
№ 6: 3, 30, 27, 88, 61, 64; 0, 3, 2, 9, 6, 7
№ 7: 4, 40, 36, 87, 51, 55; 0, 4, 3, 9, 5, 6
№ 8: 5, 50, 45, 86, 41, 46; 0, 5, 4, 9, 4, 5
№ 9: 6, 60, 54, 85, 31, 37; 0, 6, 5, 9, 3, 4
№ 10: 8, 80, 72, 83, 11, 19; 0, 8, 7, 9, 1, 2
№ 11: 12, 29, 17, 79, 62, 74; 1, 3, 1, 8, 6, 8
№ 12: 15, 59, 44, 76, 32, 47; 1, 6, 4, 8, 3, 5
№ 13: 16, 69, 53, 75, 22, 38; 1, 7, 5, 8, 2, 4
№ 14: 23, 48, 25, 68, 43, 66; 2, 5, 2, 7, 4, 7
№ 15: 24, 58, 34, 67, 33, 57; 2, 6, 3, 7, 3, 6

758241. Отсюда ясно, что если мы число 142857 умножимъ на 69 и произведеніе раздѣлимъ на 13, то получимъ число съ тѣми же цифрами, расположенными въ обратную сторону; если возьмемъ кружки 5 и 10, то получимъ $21978 \times 4 = 87912$ (см. введеніе), но у насъ остаются еще кружки 4-й, 8-й, 11-й, 14-й и 15-й, не имѣющіе себѣ пары; въ этихъ кружкахъ сами періоды имѣютъ такое расположеніе цифръ, что для каждаго числителя найдется другой числитель въ томъ же кружкѣ, котораго періодъ обратенъ первому. Такъ въ 4-мъ кружкѣ $\frac{81}{91}$ 890109; обратный періодъ 901098 получится отъ дроби $\frac{82}{91}$; слѣдовательно, если число 890109 умножить на 82, и произведеніе раздѣлить на 81, то получимъ тѣ же цифры, обратно расположенными. Нетрудно, конечно, найти для любого числа такого производителя, который въ произведеніи даетъ тѣ же цифры, обратно расположенными: стоитъ только написать произвольное число и раздѣлить его на число, котораго цифры обратно расположены. Полученное частное и будетъ искомый производитель. Но насъ занимаетъ вопросъ, почему именно этотъ знаменатель даетъ 45 періодовъ съ цифрами, расположенными въ одну сторону, и 45—съ тѣми же цифрами, росположенными въ обратную сторону? почему не встрѣчаемъ мы этого при другиха періодахъ? Правда, періоды отъ знаменателя 11 (см. фиг. II) даютъ тоже обратно расположенные періоды, но тамъ всего два знака въ періодѣ, сумма которыхъ должна быть равна 9, и слѣдовательно, нельзя и составить иного періода, какъ обратный. Какъ бы то ни было, но и знаменатель 11 даетъ намъ пять чиселъ 90, 81, 72, 63 и 54, которыя, будучи умножены на меньшій въ ихъ кругѣ числитель, и произведеніе раздѣлено на большій, дадутъ обратное число. Напр. $63 \times 4 = 252; 252 : 7 = 36$;

Для большей наглядности мы предлагаемъ здѣсь таблицу. Въ первомъ столбцѣ числители по порядку натуральныхъ чиселѣ, во второмъ ихъ періоды при знаменателѣ 91; въ третьемъ — числители, которыхъ періоды (въ четвертомъ столбцѣ) состоятъ изъ тѣхъ же цифръ въ обратномъ порядкѣ.

Числители и ихъ періодъ.		Числители съ обратнымъ періодомъ.	
1	010989	90	989010
2	021978	80	879120
3	032967	70	769230
4	043956	60	659340
5	054945	50	549450
6	065934	40	439560
7	076923	30	329670

Числители и ихъ періодъ.		Числители съ обратнымъ періодомъ.	
8	087912	20	219780
9	098901	10	109890
10	109890	9	098901
11	120879	89	978021
12	131868	79	868131
13	142857	69	758241
14	153846	59	648351
15	164835	49	538461
16	175824	39	428571
17	186813	29	318681
18	197802	19	208791
19	208791	18	197802
20	219780	8	087912
21	230769	88	967032
22	241758	78	857142
23	252747	68	747252
24	263736	58	637362
25	274725	48	527472
26	285714	38	417582
27	296703	28	307692
28	307692	27	296703
29	318681	17	186813
30	329670	7	076923
31	340659	87	956043
32	351648	77	846153
33	362637	67	736263
34	373626	57	626373
35	384615	47	516483
36	395604	37	406593
37	406593	36	395604
38	417582	26	285714
39	428571	16	175824
40	439560	6	065934
41	450549	86	945054
42	461538	76	835164
43	472527	66	725274
44	483516	56	615384
45	494505	46	505494
46	505494		

и т. д. Легко видѣть, что таблица это

составлена шаблонно, что достаточно было первыхъ десяти строкъ, чтобы замѣтить въ нихъ послѣдовательность чиселъ и цифръ, какъ въ числителяхъ, такъ и въ ихъ періодахъ, почему и считаемъ излишнимъ распространяться объ этомъ.

Заканчивая свою статью, напомню, что предлагаю только нѣкоторый матеріалъ для дальнѣйшей разработки вопроса о первоначальныхъ числахъ.



1-16-16-17-14-16-14-15-14-16-12-15-11-17-12-15-12-12-13-14-10-

15-62-

Таблица простыхъ чиселъ,

не превосходящихъ 10000.

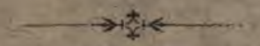
2	179	419	661	947	1229	1523	1823	2131
3	181	421	673	953	1231	1531	1831	2137
5	191	431	677	967	1237	1543	1847	2141
7	193	433	683	971	1249	1549	1861	2143
11	197	439	691	977	1259	1553	1867	2153
13	199	443	701	983	1277	1559	1871	2161
17	211	449	709	991	1279	1567	1873	2179
19	213	457	719	997	1283	1571	1877	2203
23	227	461	727	1009	1289	1579	1879	2207
29	229	463	733	1013	1291	1583	1889	2213
31	233	467	739	1019	1297	1597	1901	2221
37	239	479	743	1021	1301	1601	1907	2237
41	241	487	751	1031	1303	1607	1913	2239
43	251	491	757	1033	1307	1609	1931	2243
47	257	499	761	1039	1319	1613	1933	2251
53	263	503	769	1049	1321	1619	1949	2267
59	269	509	773	1051	1327	1621	1951	2269
61	271	521	787	1061	1361	1627	1973	2273
67	277	523	797	1063	1367	1637	1979	2281
71	281	541	809	1069	1373	1657	1987	2287
73	283	547	811	1087	1381	1663	1993	2293
79	293	557	821	1091	1399	1667	1997	2297
83	307	563	823	1093	1409	1669	1999	2309
89	311	569	827	1097	1423	1693	2003	2311
97	313	571	829	1103	1427	1697	2011	2333
101	317	577	839	1109	1429	1699	2017	2339
103	331	587	853	1117	1433	1709	2027	2341
107	337	593	857	1123	1439	1721	2029	2347
109	347	599	859	1129	1447	1723	2039	2351
113	349	601	863	1151	1451	1733	2053	2357
127	353	607	877	1153	1453	1741	2063	2371
131	359	613	881	1163	1459	1747	2069	2377
137	367	617	883	1171	1471	1753	2081	2381
139	373	619	887	1181	1481	1759	2083	2383
149	379	631	907	1187	1483	1777	2087	2389
151	383	641	911	1193	1487	1783	2089	2393
157	389	643	919	1201	1489	1787	2099	2399
163	397	647	929	1213	1493	1789	2111	2411
167	401	653	937	1217	1499	1801	2113	2417
173	409	659	941	1223	1511	1811	2129	2423

2437	2833	3259	3659	4073	4507	4943	5393	5801
2441	2837	3271	3671	4079	4513	4951	5399	5807
2447	2843	3299	3673	4091	4517	4957	5407	5813
2459	2851	3301	3677	4093	4519	4967	5413	5821
2467	2857	3307	3691	4099	4523	4969	5417	5827
2473	2861	3313	3697	4111	4547	4973	5419	5839
2477	2879	3319	3701	4127	4549	4987	5431	5843
2503	2887	3323	3709	4129	4561	4993	5437	5849
2521	2897	3329	3719	4133	4567	4999	5441	5851
2531	2903	3331	3727	4139	4583	5003	5443	5857
2539	2909	3343	3733	4153	4591	5009	5449	5861
2543	2917	3347	3739	4157	4597	5011	5471	5867
2549	2927	3359	3761	4159	4603	5021	5477	5869
2551	2939	3361	3767	4177	4621	5023	5479	5879
2557	2953	3371	3769	4201	4637	5039	5483	5881
2579	2957	3373	3779	4211	4639	5051	5501	5897
2591	2963	3389	3793	4217	4643	5059	5503	5903
2593	2969	3391	3797	4219	4649	5077	5507	5923
2609	2971	3407	3803	4229	4651	5081	5519	5927
2617	2999	3413	3821	4231	4657	5087	5521	5939
2621	3001	3433	3823	4241	4663	5099	5527	5953
2633	3011	3449	3833	4243	4673	5101	5531	5981
2647	3019	3457	3847	4253	4679	5107	5557	5987
2657	2023	3461	3851	4259	4691	5113	5563	6007
2659	3037	3463	3853	4261	4703	5119	5569	6011
2663	3041	3467	3863	4271	4721	5147	5573	6029
2671	3049	3469	3877	4273	4723	5153	5581	6037
2677	3061	3491	3881	4283	4729	5167	5591	6043
2683	3067	3499	3889	4289	4733	5171	5623	6047
2687	3079	3511	3907	4297	4751	5179	5639	6053
2689	3083	3517	3911	4327	4759	5189	5641	6067
2693	3089	3527	3917	4337	4783	5197	5647	6073
2699	3109	3529	3919	4339	4787	5209	5651	6079
2707	3119	3533	3923	4349	4789	5227	5653	6089
2711	3121	3539	3929	4357	4793	5231	5657	6091
2713	3137	3541	3931	4363	4799	5233	5659	6101
2719	3163	3547	3943	4373	4801	5237	5669	6113
2729	3167	3557	3947	4391	4813	5261	5683	6121
2731	3169	3559	3967	4397	4817	5273	5689	6131
2741	3181	3571	3989	4409	4831	5279	5693	6133
2749	3187	3581	4001	4421	4861	5281	5701	6143
2753	3191	3583	4003	4423	4871	5297	5711	6151
2767	3203	3593	4007	4441	4877	5303	5717	6163
2777	3209	3607	4013	4447	4889	5309	5737	6173
2789	3217	3613	4019	4451	4903	5323	5741	6197
2791	3221	3617	4021	4457	4909	5333	5743	6199
2797	3229	3623	4027	4463	4919	5347	5749	6203
2801	3251	3631	4049	4481	4931	5351	5779	6211
2803	3253	3637	4051	4483	4933	5381	5783	6217
2819	*3257*	*3643*	4057	4493	4937	5387	5791	6221

6229	6679	7121	7577	8053	8521	8951	9403	9839
6247	6689	7127	7583	8059	8527	8963	9413	9851
6257	6691	7129	7589	8069	8537	8969	9419	9857
6263	6701	7151	7591	8081	8539	8971	9421	9859
6269	6709	7159	7603	8087	8543	8999	9431	9871
6271	6719	7177	7607	8089	8563	9001	9437	9883
6277	6733	7187	7621	8093	8573	9007	9439	9887
6287	6737	7193	7639	8101	8581	9011	9461	9901
6299	6761	7207	7643	8111	8597	9013	9463	9907
6301	6763	7211	7649	8117	8599	9029	9467	9923
6311	6779	7213	7669	8123	8609	9041	9473	9929
6317	6781	7219	7673	8147	8623	9043	9479	9931
6323	6791	7229	7681	8161	8627	9049	9491	9941
6329	6793	7237	7687	8167	8629	9059	9497	9949
6337	6803	7243	7691	8171	8641	9067	9511	9967
6343	6823	7247	7699	8179	8647	9091	9521	9973
6353	6827	7253	7703	8191	8663	9103	9533	
6359	6829	7283	7717	8209	8669	9109	9539	
6361	6833	7297	7723	8219	8677	9127	9547	
6367	6841	7307	7727	8221	8681	9133	9551	
6373	6857	7309	7741	8231	8689	9137	9587	
6379	6863	7321	7753	8233	8693	9151	9601	
6389	6869	7331	7757	8237	8699	9157	9613	
6397	6871	7333	7759	8243	8707	9161	9619	
6421	6883	7349	7789	8263	8713	9173	9623	
6427	6899	7351	7793	8269	8719	9181	9629	
6449	6907	7369	7817	8273	8731	9187	9631	
6451	6911	7393	7823	8287	8737	9199	9643	
6469	6917	7411	7829	8291	8741	9203	9649	
6473	6947	7417	7841	8293	8747	9209	9661	
6481	6949	7433	7853	8297	8753	9221	9677	
6491	6959	7451	7867	8311	8761	9227	9679	
6521	6961	7457	7873	8317	8779	9239	9689	
6529	6967	7459	7877	8329	8783	9241	9697	
6547	6971	7477	7879	8353	8803	9257	9719	
6551	6977	7481	7883	8363	8807	9277	9721	
6553	6983	7487	7901	8369	8819	9281	9733	
6563	6991	7489	7907	8377	8921	9283	9739	
6569	6997	7499	7919	8387	8831	9293	9743	
6571	7001	7507	7927	8389	8837	9311	9749	
6577	7013	7517	7933	8419	8839	9319	9767	
6581	7019	7523	7937	8423	8849	9323	9769	
6599	7027	7529	7949	8429	8861	9337	9781	
6607	7039	7537	7951	8431	8863	9341	9787	
6619	7043	7541	7963	8443	8887	9343	9791	
6637	7057	7547	7993	8447	8893	9349	9803	
6653	7069	7549	8009	8461	8923	9371	9811	
6659	7079	7559	8011	8467	8929	9377	9817	
6661	7103	7561	8017	8501	8933	9391	9829	
6673	7109	7573	8039	8513	8941	9397	9833	

Д. Селивановъ.

БЕЗКОНЕЧНЫЯ ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1907.

Введемъ обозначенie

$$A_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Предположимъ, что дано положительное число α (цѣлое или дробное).

Если окажется, что *при нѣкоторомъ* n

$$A_n > \alpha,$$

то мы будемъ говорить, что α *часть* совокупности a.

Если же *при всякомъ* n

$$A_n \leqq \alpha,$$

то α — *нечасть* совокупности a.

Напр.,

$$a = 0{,}312457\ldots, \quad \alpha = 0{,}3124.$$

Такъ какъ

$$A_5 = 0{,}31245 > \alpha,$$

то α — часть a.

При всякомъ n имѣемъ

$$A_n < 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \ldots + \frac{9}{10^n},$$

такъ какъ предполагается, что a безконечная десятичная дробь и потому каждый десятичный знакъ меньше 10.

Принимая во вниманie, что

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^m} = 1 - \frac{1}{10^m},$$

получимъ, что при всякомъ m

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^m} < 1.$$

Д. Селивановъ.

БЕЗКОНЕЧНЫЯ ДЕСЯТИЧНЫЯ ДРОБИ И ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1907.

ВВЕДЕНІЕ.

Предположимъ, что мы желаемъ дробь $\frac{5}{33}$ обратить въ десятичную. Произведя дѣленіе, найдемъ

$$\begin{array}{r|l} 50 & 33 \\ \underline{33} & 0,1515\ldots \\ 170 & \\ \underline{165} & \\ 50 & \\ \underline{33} & \\ 170 & \\ \underline{165} & \\ 5\ldots & \end{array}$$

Какъ видимъ, въ частномъ будутъ неизмѣнно повторяться цифры 1, 5, 1, 5, ... , и получается безконечная періодическая десятичная дробь

$$0,151515\ldots.$$

Утверждать, что

$$0,151515\ldots. \times 33 = 5,$$

мы не можемъ, пока не объяснено, что мы понимаемъ подъ произведеніемъ безконечной десятичной дроби на цѣлое число.

Безконечныя десятичныя дроби получаются также при извлеченіи корней. Напр.

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400

Это вычисленіе не можетъ окончиться, такъ какъ извѣстно, что квадратъ цѣлаго числа не можетъ равняться двумъ и квадратъ несократимой дроби не можетъ равняться цѣлому числу.

Прежде чѣмъ утверждать, что квадратъ безконечной десятичной дроби

$$1,4142\ldots.$$

равняется двумъ, надо опредѣлить, что называется произведеніемъ двухъ безконечныхъ дробей.

Изъ сказаннаго ясно, насколько важно изучить свойства безконечныхъ десятичныхъ дробей и опредѣлить дѣйствія надъ ними. Это и составитъ предметъ настоящей замѣтки.

Безконечныя десятичныя дроби.

§ 1. *Совокупность безчисленнаго множества элементовъ.* Мы будемъ разсматривать совокупность

$$a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots.,$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, ... цѣлыя положительныя числа или нули. Такая совокупность дана, если каждому значенію n соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе числа a_n. Будемъ для краткости обозначать эту совокупность буквою a и будемъ писать

$$a=\left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots.\right).$$

Если всѣ числа

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots.$$

меньше 10, то a есть *безконечная десятичная дробь.*

Если, начиная съ нѣкотораго k,

$$a_k=0,\ a_{k+1}=0,\ a_{k+2}=0,\ldots.,$$

то a — *конечная десятичная дробь.*

Если всѣ элементы, начиная съ a_1, равны нулю, то a есть цѣлое число a_0.

§ 2. *Часть и нечасть совокупности.* Дана совокупность

$$a=\left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots.\right).$$

Введемъ обозначенiе

$$A_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Предположимъ, что дано положительное число α (цѣлое или дробное).

Если окажется, что *при нѣкоторомъ* n

$$A_n > \alpha,$$

то мы будемъ говорить, что α *часть* совокупности a.

Если же *при всякомъ* n

$$A_n \leqq \alpha,$$

то α — *нечасть* совокупности a.

Напр.,

$$a = 0{,}312457\ldots, \quad \alpha = 0{,}3124.$$

Такъ какъ

$$A_5 = 0{,}31245 > \alpha,$$

то α — часть a.

При всякомъ n имѣемъ

$$A_n < 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + \ldots + \frac{9}{10^n},$$

такъ какъ предполагается, что a безконечная десятичная дробь и потому каждый десятичный знакъ меньше 10.

Принимая во вниманiе, что

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^m} = 1 - \frac{1}{10^m},$$

получимъ, что при всякомъ m

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^m} < 1.$$

На этомъ основаніи

$$\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+\ldots+\frac{9}{10^n}<\frac{1}{10^4}$$

и

$$A_n<0,3125.$$

Слѣд. число 0,3125 — нечасть a.

Изъ опредѣленій части и нечасти слѣдуютъ теоремы:

1) Если α часть a и $\alpha>\beta$, то β тоже часть a.

2) Если α нечасть a и $\alpha<\beta$, то β тоже нечасть a.

3) Дана совокупность

$$a=\left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots\right).$$

Если не всѣ числа

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ldots$$

равны нулю, то

$$A_n=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}$$

часть a.

4) Если (при обозначеніяхъ теоремы 3) всѣ числа

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ldots$$

меньше 10, то

$$A_n+\frac{1}{10^n}$$

нечасть a.

5) Если a конечная десятичная дробь и $a>\alpha$, то α часть a; если же $a\leqq\alpha$, то α — нечасть a.

§ 3. *Равенство двухъ совокупностей.* Даны двѣ совокупности a и b.

Можетъ случиться, что всякая часть a есть часть b и всякая часть b есть часть a. Въ такомъ случаѣ мы будемъ говорить, что *a равно b* и писать: $a=b$.

Изъ этого опредѣленія слѣдуютъ теоремы:

1) Если $a=b$, то $b=a$.

2) Если $a=b$, $b=c$, то $a=c$.

Для примѣра разсмотримъ совокупности

$$a=\left(0,\ \frac{9}{10},\ \frac{9}{10^2},\ldots\right),\ b=\left(1,\ \frac{0}{10},\ \frac{0}{10^2},\ldots\right).$$

Здѣсь при всякомъ n (кромѣ $n=0$)

$$a_n=9 \text{ и } b_n=0.$$

1 — нечасть a, такъ какъ

$$A_n=1-\frac{1}{10^n}$$

и, слѣд., при всякомъ n

$$A_n<1.$$

Всякое положительное число α меньшее единицы есть часть a.

Въ самомъ дѣлѣ, мы удовлетворимъ неравенству

$$1-\frac{1}{10^n}>\alpha,$$

если выберемъ n такъ, чтобы

$$10^n>\frac{1}{1-\alpha}.$$

Что касается до совокупности b, то при всякомъ n

$$B_n=1$$

и, слѣд., 1 — нечасть b, всякая же положительная правильная дробь α есть часть b, такъ какъ

$$B_n>\alpha.$$

На основаніи высказаннаго опредѣленія мы имѣемъ

$$a=b.$$

Точно такъ же мы убѣдимся, что, напр.,

$$0{,}324999\ldots\ldots = 0{,}325.$$

При изслѣдованiи равенства двухъ совокупностей достаточно предполагать α равнымъ конечной десятичной дроби.

Предположимъ, что мы убѣдились, что данныя совокупности a и b таковы, что всякая дробь $\frac{c}{10^m}$, которая есть часть a, въ то же время — часть b и обратно.

Мы утверждаемъ, что *всякая дробь* $\frac{p}{q}$, *составляющая часть* a, *будетъ и часть* b.

Если $\frac{p}{q}$ — часть a, то при нѣкоторомъ n

$$A_n > \frac{p}{q}.$$

Предположимъ, что $\frac{p}{q}$ — нечасть b. Въ такомъ случаѣ при всякомъ n

$$B_n \leqq \frac{p}{q}.$$

Можно найти такое цѣлое положительное число m, что

$$10^m\left(A_n - \frac{p}{q}\right) > 1.$$

Для этого достаточно удовлетворить неравенству

$$10^m > \frac{1}{A_n - \frac{p}{q}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при нѣкоторомъ цѣломъ положительномъ c будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$10^m . A_n > c > 10^m . \frac{p}{q}$$

и

$$A_n > \frac{c}{10^m} > \frac{p}{q}.$$

Это показываетъ, что $\frac{c}{10^m}$ — часть a. На основаніи сдѣланнаго предположенія $\frac{c}{10^m}$ — часть b, т.-е. при нѣкоторомъ n

$$B_n > \frac{c}{10^m}.$$

Но такъ какъ при всякомъ n

$$B_n \leq \frac{p}{q},$$

то

$$\frac{c}{10^m} < \frac{p}{q},$$

что противорѣчитъ вышенаписанному неравенству.

Точно такъ же убѣдимся, что *всякая дробь* $\frac{p}{q}$, *составляющая часть* b, *будетъ и часть* a.

Итакъ высказанная теорема доказана.

§ 4. *Опредѣленіе понятій «больше» и «меньше».* Возьмемъ двѣ конечныхъ десятичныхъ дроби a и b и предположимъ, что

$$a > b.$$

На основаніи теоремы 5-ой (§ 2) мы можемъ утверждать, что

1) существуетъ число α, которое есть часть a и нечасть b;

2) всякая часть b есть часть a.

Предположимъ теперь, что a и b какія-нибудь совокупности неравныя между собой. Въ такомъ случаѣ существуетъ число α, которое есть часть одной изъ этихъ совокупностей и нечасть другой. Пусть α часть a и нечасть b.

Изслѣдуемъ, существуетъ ли число β, которое есть часть b и нечасть a.

Такъ какъ α часть a и нечасть b, то при нѣкоторомъ n

$$A_n > \alpha$$

и при всякомъ n

$$B_n \leqq \alpha.$$

Если β часть b и нечасть a, то при нѣкоторомъ n

$$B_n > \beta$$

и при всякомъ n

$$A_n \leqq \beta.$$

Изъ неравенствъ

$$A_n > \alpha, \; A_n \leqq \beta$$

слѣдуетъ, что

$$\beta > \alpha;$$

неравенства же

$$B_n \leqq \alpha, \; B_n > \beta$$

приводятъ къ противоположному заключенію, что

$$\beta < \alpha.$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Если число α есть часть совокупности a и нечасть b, то всякая часть b есть часть a.

Въ этомъ случаѣ мы будемъ говорить, что *a больше b* и b *меньше a*:

$$a > b, \; b < a.$$

Предположимъ, что

$$a > b, \; b > c.$$

На основаніи опредѣленія существуютъ такія числа α и β, что

α — часть a, α — нечасть b,

β — часть b, β — нечасть c.

По доказанной теоремѣ

β — часть a,

а такъ какъ β — нечасть c, то

$$a > c.$$

Итакъ, *если*

$$a > b,\ b > c,$$

то

$$a > c.$$

Дана безконечная десятичная дробь

$$a = \left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2}, \ldots\right)$$

Если не всѣ числа

$$a_{n+1},\ a_{n+2}, \ldots$$

равны нулю, то

$$a > A_n.$$

Чтобы доказать эту теорему, предположимъ, что

$$a_{n+p} \text{ не} = 0.$$

Такъ какъ число

$$A_n + \frac{a_{n+p} - 1}{10^{n+p}} + \frac{9}{10^{n+p+1}}$$

есть часть a и нечасть A_n, то

$$a > A_n.$$

Если не всѣ числа

$$a_{n+1},\ a_{n+2}, \ldots$$

равны 9, то

$$a < A_n + \frac{1}{10^n}.$$

Предполагая, что a_{n+p} не $= 9$, получимъ число

$$A_n + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{9}{10^{n+p}},$$

которое — часть $A_n + \frac{1}{10^n}$ и нечасть a, что и доказываетъ высказанную теорему.

Примѣчаніе. На лекціяхъ по введенію въ теорію аналитическихъ функцій Вейерштрассъ (Weierstrass) разсматривалъ совокупности вида

$$\left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots.\right)$$

и установилъ понятія «равно», «больше» и «меньше». Объ этомъ можно найти въ статьѣ Пинкерле (Pincherle), напечатанной въ 1880 году въ 18 томѣ журнала Battaglini.

Въ настоящей замѣткѣ мы воспользовались мыслями Вейерштрасса и, для достиженія бо́льшей простоты изложенія, ограничились разсмотрѣніемъ совокупностей вида

$$\left(a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots.\right).$$

§ 5. *Совокупность равная безконечности.*

Можетъ случиться, что всякое число α есть часть данной совокупности a. Въ такомъ случаѣ будемъ говорить, что *a равно безконечности:*

$$a = \infty.$$

Напр.,

$$a = \left(0, \frac{5}{10}, \frac{50}{10^2}, \frac{500}{10^3}, \ldots., \frac{5.10^{n-1}}{10^n}, \ldots.\right)$$

Въ этомъ случаѣ

$$A_n = \frac{n}{2}$$

и при достаточно большомъ n число A_n превзойдетъ какое угодно данное число α.

Слѣдовательно, α — часть a, и потому

$$a = \infty.$$

Изъ опредѣленія равенства (§ 3) и неравенства (§ 4) слѣдуютъ теоремы:

Докажемъ, что

$$b + c > b.$$

Такъ какъ c не $= 0$, то по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ

$$c_0, \; c_1, \; c_2, \ldots .$$

не равно нулю. Предположимъ, напр., что c_k не $= 0$. Въ такомъ случаѣ число

$$b_0 + c_0 + \frac{b_1 + c_1}{10} + \frac{b_2 + c_2}{10^2} + \ldots . + \frac{b_k + c_k - 1}{10^k} + \frac{b_{k+1} + 9}{10^{k+1}}$$

есть часть совокупности

$$\left(b_0 + c_0, \; \frac{b_1 + c_1}{10}, \; \frac{b_2 + c_2}{10^2}, \ldots .\right)$$

равной $b + c$ и — нечасть b. Слѣд. высказанная теорема доказана.

Предположимъ, что

$$a > b.$$

Докажемъ, что

$$a + c > b + c.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что $a > b$ слѣдуетъ, что при нѣкоторомъ $d > 0$

$$a = b + d.$$

На основаніи сочетательнаго и перестановительнаго законовъ имѣемъ

$$a + c = (b + d) + c = b + (d + c) = b + (c + d) = (b + c) + d,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$a + c > b + c$$

на основаніи только что доказанной теоремы.

§ 9. *Умноженіе.* Даны двѣ безконечныхъ десятичныхъ дроби

$$a = \left(a_0, \; \frac{a_1}{10}, \; \frac{a_2}{10^2}, \ldots .\right)$$

Требуется доказать, что a равно

$$b = \left(b_0, \frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \ldots \right),$$

гдѣ каждое изъ чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ меньше 10.

Такъ какъ a не $=\infty$, то существуетъ число α — нечасть a. Возьмемъ цѣлое число N бо́льшее α. По теоремѣ 2-ой (§ 2), N — нечасть a.

Если нуль — нечасть a, то теорема доказана, такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$a = 0.$$

Если же a не $= 0$, то 0 — часть a.

Въ ряду чиселъ

$$0, 1, 2, \ldots, N-1, N$$

первый членъ часть a, а послѣдній — нечасть. Поэтому найдутся такіе два члена этого ряда

$$b_0, b_0 + 1,$$

что b_0 — часть a, а $(b_0 + 1)$ — нечасть a.

Точно такъ же въ ряду

$$b_0, b_0 + \frac{1}{10}, b_0 + \frac{2}{10}, \ldots, b_0 + \frac{9}{10}, b_0 + 1$$

найдутся такія два числа

$$b_0 + \frac{b_1}{10}, b_0 + \frac{b_1 + 1}{10},$$

что первое изъ нихъ часть a, а второе — нечасть a.

Такимъ образомъ получается безконечная десятичная дробь

$$b = \left(b_0, \frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \ldots \right),$$

элементы которой опредѣляются изъ условія, что при всякомъ n

$$B_n \text{— часть } a, \text{ а } B_n + \frac{1}{10^n} \text{— нечасть } a.$$

На основаніи теоремы, доказанной въ концѣ § 3, мы имѣемъ

$$a = b$$

и, слѣд., наша теорема доказана.

Перейдемъ къ опредѣленію дѣйствій надъ безконечными десятичными дробями.

Если въ данной безконечной десятичной дроби

$$a = \left(a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{a_n}{10^n}, \ldots\right)$$

всѣ числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ равны 9, то

$$a = a_0 + 1;$$

если же при $n > 0$

$$a_{n+1} = 9, \; a_{n+2} = 9, \; a_{n+3} = 9, \ldots$$

и $a_n < 9$, то получаемъ конечную десятичную дробь

$$a = \left(a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}, \frac{a_n + 1}{10^n}\right).$$

Поэтому мы будемъ предполагать въ послѣдующихъ параграфахъ, что въ данной безконечной десятичной дроби a не всѣ числа

$$a_{n+1}, \; a_{n+2}, \; a_{n+3}, \ldots$$

равны 9, какъ бы ни было велико n.

§ 7. *Сложеніе.* Даны двѣ безконечныхъ десятичныхъ дроби

$$a = \left(a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots\right),$$

$$b = \left(b_0, \frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \ldots\right).$$

Разсмотримъ совокупность

$$m=\left(a_0+b_0,\ \frac{a_1+b_1}{10},\ \frac{a_2+b_2}{10^2},\ldots\right).$$

Полагая

$$M_n=a_0+b_0+\frac{a_1+b_1}{10}+\frac{a_2+b_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n+b_n}{10^n},$$

получимъ, что при достаточно большомъ n

$$M_n<a_0+b_0+\frac{2.9}{10}+\frac{2.9}{10^2}+\ldots+\frac{2.9}{10^n}.$$

Такъ какъ при всякомъ n

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\ldots+\frac{9}{10^n}<1,$$

то

$$M_n<(a_0+1)+(b_0+1).$$

Слѣд., m не $=\infty$ и по теоремѣ, доказанной въ § 6, совокупность m равняется нѣкоторой безконечной десятичной дроби

$$c=\left(c_0,\ \frac{c_1}{10},\ \frac{c_2}{10^2},\ldots\right),$$

которую будемъ называть *суммою* a и b:

$$c=a+b.$$

Это опредѣленіе сложенія распространяется на какія угодно совокупности неравныя безконечности.

При всякомъ k

$$a_k+b_k=b_k+a_k,\ (a_k+b_k)+c_k=a_k+(b_k+c_k).$$

Поэтому $a+b$ даетъ ту же совокупность m, какъ и $b+a$. Точно такъ же $(a+b)+c$ и $a+(b+c)$ приводятся къ одной и той же совокупности m.

Такимъ образомъ получаемъ теоремы:

$$a+b=b+a,\ (a+b)+c=a+(b+c).$$

§ 8. *Вычитаніе.* Предположимъ, что данныя безконечныя десятичныя дроби

$$a=\left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots.\right),$$

$$b=\left(b_0,\ \frac{b_1}{10},\ \frac{b_2}{10^2},\ldots.\right)$$

таковы, что

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ldots.,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k>b_k.$$

Такъ какъ не всѣ числа $b_{k+1}, b_{k+2},\ldots.$ равны 9, то, предполагая, что b_{k+p} не $=9$, получимъ число

$$b_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots.+\frac{b_k}{10^k}+\frac{9}{10^{k+1}}+\ldots.+\frac{9}{10^{k+p}},$$

которое — часть a и нечасть b. Поэтому

$$a>b.$$

Докажемъ, что можно найти такое c, что

$$a=b+c$$

и c не $=0$.

Такая безконечная десятичная дробь c называется *разностью* a и b:

$$c=a-b.$$

Если бы оказалось, что всѣ числа

$$a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ldots.$$

соотвѣтственно не меньше чиселъ

$$b_{k+1},\ b_{k+2},\ b_{k+3},\ldots.$$

то

$$c=\left(0,\ \frac{0}{10},\ \frac{0}{10^2},\ldots.,\ \frac{0}{10^{k-1}},\ \frac{a_k-b_k}{10^k},\ \frac{a_{k+1}-b_{k+1}}{10^{k+1}},\ldots.\right).$$

Такъ какъ

$$c\geqq\frac{a_k-b_k}{10^k}\ \text{и}\ a_k>b_k,$$

то c не $=0$.

Если бы нѣкоторыя изъ чиселъ

$$a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ldots.$$

были соотвѣтственно меньше чиселъ

$$b_{k+1},\ b_{k+2},\ b_{k+3},\ldots.,$$

то безконечную десятичную дробь a замѣняемъ равною ей совокупностью

$$a=\left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots.,\ \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}},\ \frac{a_k-1}{10^k},\ \frac{a_{k+1}+9}{10^{k+1}},\ \frac{a_{k+2}+9}{10^{k+2}},\ldots.\right).$$

Изъ опредѣленія сложенія слѣдуетъ, что

$$c=\left(0,\ \frac{0}{10},\ \frac{0}{10^2},\ldots.,\ \frac{0}{10^{k-1}},\ \frac{a_k-1-b_k}{10^k},\ \frac{a_{k+1}+9-b_{k+1}}{10^{k+1}},\ \frac{a_{k+2}+9-b_{k+2}}{10^{k+2}},\ldots.\right).$$

Эта совокупность не равна безконечности и, слѣд., можетъ быть замѣнена безконечною десятичною дробью.

Не можетъ c равняться нулю, въ противномъ случаѣ было бы

$$a_k=b_k+1,\ a_{k+1}+9=b_{k+1},\ a_{k+2}+9=b_{k+2},\ldots.$$

Такъ какъ всѣ числа $b_{k+1}, b_{k+2},\ldots.$ не превосходятъ 9, то

$$a_{k+1}=0,\ a_{k+2}=0,\ a_{k+3}=0,\ldots.$$
$$b_{k+1}=9,\ b_{k+2}=9,\ b_{k+3}=9,\ldots.,$$

а мы предполагали, что не всѣ числа $b_{k+1}, b_{k+2}, b_{k+3},\ldots.$ равны 9.

Предположимъ, что даны двѣ безконечныхъ десятичныхъ дроби

$$b=\left(b_0,\ \frac{b_1}{10},\ \frac{b_2}{10^2},\ldots.\right),$$

и

$$c=\left(c_0,\ \frac{c_1}{10},\ \frac{c_2}{10^2},\ldots.\right),$$

гдѣ c не $=0$.

элементы которой опредѣляются изъ условія, что при всякомъ n

$$B_n \text{— часть } a, \text{ а } B_n + \frac{1}{10^n} \text{— нечасть } a.$$

На основаніи теоремы, доказанной въ концѣ § 3, мы имѣемъ

$$a = b$$

и, слѣд., наша теорема доказана.

Перейдемъ къ опредѣленію дѣйствій надъ безконечными десятичными дробями.

Если въ данной безконечной десятичной дроби

$$a = \left(a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{a_n}{10^n}, \ldots\right)$$

всѣ числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ равны 9, то

$$a = a_0 + 1;$$

если же при $n > 0$

$$a_{n+1} = 9, \; a_{n+2} = 9, \; a_{n+3} = 9, \ldots$$

и $a_n < 9$, то получаемъ конечную десятичную дробь

$$a = \left(a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}, \frac{a_n+1}{10^n}\right).$$

Поэтому мы будемъ предполагать въ послѣдующихъ параграфахъ, что въ данной безконечной десятичной дроби a не всѣ числа

$$a_{n+1}, \; a_{n+2}, \; a_{n+3}, \ldots$$

равны 9, какъ бы ни было велико n.

§ 7. *Сложеніе.* Даны двѣ безконечныхъ десятичныхъ дроби

$$a = \left(a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots\right),$$

$$b = \left(b_0, \frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \ldots\right).$$

Разсмотримъ совокупность

$$m = \left(a_0 + b_0,\ \frac{a_1 + b_1}{10},\ \frac{a_2 + b_2}{10^2}, \ldots \right).$$

Полагая

$$M_n = a_0 + b_0 + \frac{a_1 + b_1}{10} + \frac{a_2 + b_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + b_n}{10^n},$$

получимъ, что при достаточно большомъ n

$$M_n < a_0 + b_0 + \frac{2.9}{10} + \frac{2.9}{10^2} + \ldots + \frac{2.9}{10^n}.$$

Такъ какъ при всякомъ n

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} < 1,$$

то

$$M_n < (a_0 + 1) + (b_0 + 1).$$

Слѣд., m не $= \infty$ и по теоремѣ, доказанной въ § 6, совокупность m равняется нѣкоторой безконечной десятичной дроби

$$c = \left(c_0,\ \frac{c_1}{10},\ \frac{c_2}{10^2}, \ldots \right),$$

которую будемъ называть *суммою* a и b:

$$c = a + b.$$

Это опредѣленіе сложенія распространяется на какія угодно совокупности неравныя безконечности.

При всякомъ k

$$a_k + b_k = b_k + a_k,\ (a_k + b_k) + c_k = a_k + (b_k + c_k).$$

Поэтому $a + b$ даетъ ту же совокупность m, какъ и $b + a$. Точно такъ же $(a + b) + c$ и $a + (b + c)$ приводятся къ одной и той же совокупности m.

Такимъ образомъ получаемъ теоремы:

$$a + b = b + a,\ (a + b) + c = a + (b + c).$$

§ 8. *Вычитаніе.* Предположимъ, что данныя безконечныя десятичныя дроби

$$a=\left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots\right),$$

$$b=\left(b_0,\ \frac{b_1}{10},\ \frac{b_2}{10^2},\ldots\right)$$

таковы, что

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ldots,\ a_{k-1}=b_{k-1},\ a_k>b_k.$$

Такъ какъ не всѣ числа $b_{k+1}, b_{k+2},\ldots$ равны 9, то, предполагая, что b_{k+p} не $=9$, получимъ число

$$b_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\ldots+\frac{b_k}{10^k}+\frac{9}{10^{k+1}}+\ldots+\frac{9}{10^{k+p}},$$

которое — часть a и нечасть b. Поэтому

$$a>b.$$

Докажемъ, что можно найти такое c, что

$$a=b+c$$

и c не $=0$.

Такая безконечная десятичная дробь c называется *разностью* a и b:

$$c=a-b.$$

Если бы оказалось, что всѣ числа

$$a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ldots$$

соотвѣтственно не меньше чиселъ

$$b_{k+1},\ b_{k+2},\ b_{k+3},\ldots$$

то

$$c=\left(0,\ \frac{0}{10},\ \frac{0}{10^2},\ldots,\ \frac{0}{10^{k-1}},\ \frac{a_k-b_k}{10^k},\ \frac{a_{k+1}-b_{k+1}}{10^{k+1}}\ldots\right).$$

Такъ какъ

$$c\geqq\frac{a_k-b_k}{10^k}\text{ и } a_k>b_k,$$

то c не $=0$.

Если бы нѣкоторыя изъ чиселъ

$$a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3},\ldots.$$

были соотвѣтственно меньше чиселъ

$$b_{k+1},\ b_{k+2},\ b_{k+3},\ldots,$$

то безконечную десятичную дробь a замѣняемъ равною ей совокупностью

$$a=\left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2},\ldots,\ \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}},\ \frac{a_k-1}{10^k},\ \frac{a_{k+1}+9}{10^{k+1}},\ \frac{a_{k+2}+9}{10^{k+2}},\ldots\right).$$

Изъ опредѣленія сложенія слѣдуетъ, что

$$c=\left(0,\ \frac{0}{10},\ \frac{0}{10^2},\ldots,\ \frac{0}{10^{k-1}},\ \frac{a_k-1-b_k}{10^k},\ \frac{a_{k+1}+9-b_{k+1}}{10^{k+1}},\ \frac{a_{k+2}+9-b_{k+2}}{10^{k+2}},\ldots\right).$$

Эта совокупность не равна безконечности и, слѣд., можетъ быть замѣнена безконечною десятичною дробью.

Не можетъ c равняться нулю, въ противномъ случаѣ было бы

$$a_k=b_k+1,\ a_{k+1}+9=b_{k+1},\ a_{k+2}+9=b_{k+2},\ldots.$$

Такъ какъ всѣ числа $b_{k+1}, b_{k+2},\ldots$ не превосходятъ 9, то

$$a_{k+1}=0,\ a_{k+2}=0,\ a_{k+3}=0,\ldots.$$
$$b_{k+1}=9,\ b_{k+2}=9,\ b_{k+3}=9,\ldots,$$

а мы предполагали, что не всѣ числа $b_{k+1}, b_{k+2}, b_{k+3},\ldots$ равны 9.

Предположимъ, что даны двѣ безконечныхъ десятичныхъ дроби

$$b=\left(b_0,\ \frac{b_1}{10},\ \frac{b_2}{10^2},\ldots\right),$$

и

$$c=\left(c_0,\ \frac{c_1}{10},\ \frac{c_2}{10^2},\ldots\right),$$

гдѣ c не $=0$.

Докажемъ, что

$$b + c > b.$$

Такъ какъ c не $= 0$, то по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ

$$c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots .$$

не равно нулю. Предположимъ, напр., что c_k не $= 0$. Въ такомъ случаѣ число

$$b_0 + c_0 + \frac{b_1 + c_1}{10} + \frac{b_2 + c_2}{10^2} + \ldots . + \frac{b_k + c_k - 1}{10^k} + \frac{b_{k+1} + 9}{10^{k+1}}$$

есть часть совокупности

$$\left(b_0 + c_0,\ \frac{b_1 + c_1}{10},\ \frac{b_2 + c_2}{10^2}, \ldots .\right)$$

равной $b + c$ и — нечасть b. Слѣд. высказанная теорема доказана.

Предположимъ, что

$$a > b.$$

Докажемъ, что

$$a + c > b + c.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что $a > b$ слѣдуетъ, что при нѣкоторомъ $d > 0$

$$a = b + d.$$

На основанiи сочетательнаго и перестановительнаго законовъ имѣемъ

$$a + c = (b + d) + c = b + (d + c) = b + (c + d) = (b + c) + d,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$a + c > b + c$$

на основанiи только что доказанной теоремы.

§ 9. *Умноженiе.* Даны двѣ безконечныхъ десятичныхъ дроби

$$a = \left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2}, \ldots .\right)$$

и

$$b = \left(b_0, \frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \ldots.\right).$$

Составимъ совокупность

$$m = \left(m_0, \frac{m_1}{10}, \frac{m_2}{10^2}, \ldots.\right),$$

гдѣ

$$m_0 = a_0\, b_0,\ m_1 = a_0\, b_1 + a_1\, b_0,$$

$$m_2 = a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0, \ldots.$$

$$m_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + a_2\, b_{n-2} + \ldots. + a_n\, b_0, \ldots.$$

Докажемъ, что m не $= \infty$. Чтобы въ этомъ убѣдиться, надо показать, что при всякомъ n число

$$M_n = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \ldots. + \frac{m_n}{10^n}$$

меньше нѣкотораго числа.

Такъ какъ всѣ числа $a_1, a_2, a_3, \ldots., b_1, b_2, b_3, \ldots.$ не превосходятъ 9 и нѣкоторыя изъ нихъ меньше 9, то при достаточно большомъ n

$$M_n < a_0 b_0 + \frac{a_0.9 + b_0.9}{10} + \frac{a_0.9 + 9.9 + b_0.9}{10^2} + \ldots. + \frac{a_0.9 + (n-1).9.9 + b_0.9}{10^n}.$$

Это неравенство можно еще переписать слѣдующимъ образомъ

$$M_n < a_0\, b_0 + a_0 \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots. + \frac{9}{10^n}\right)$$

$$+ b_0 \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots. + \frac{9}{10^n}\right) + \frac{9}{10}\left(\frac{9}{10} + \frac{2.9}{10^2} + \ldots. + \frac{(n-1).9}{10^{n-1}}\right).$$

Намъ извѣстно, что при всякомъ n

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots. + \frac{9}{10^n} < 1.$$

Такъ какъ

$$\frac{9}{10} + \frac{2.9}{10^2} + \frac{3.9}{10^3} + \ldots. + \frac{(n-1).9}{10^{n-1}}$$

равно

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots\ldots+\frac{9}{10^{n-1}}$$

$$+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots\ldots+\frac{9}{10^{n-1}}$$

$$+\frac{9}{10^3}+\ldots\ldots+\frac{9}{10^{n-1}}$$

. . . .

$$+\frac{9}{10^{n-1}},$$

то эта сумма меньше, чѣмъ

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{10^{n-2}}$$

и, слѣд.,

$$\frac{9}{10}\left(\frac{9}{10}+\frac{2.9}{10^2}+\frac{3.9}{10^3}+\ldots+\frac{(n-1).9}{10^{n-1}}\right)<\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\ldots+\frac{9}{10^{n-1}}<1.$$

Поэтому

$$M_n<a_0\,b_0+a_0+b_0+1,$$

или

$$M_n<(a_0+1)\,(b_0+1).$$

Итакъ m не $=\infty$ и потому m равно нѣкоторой безконечной десятичной дроби

$$c=\left(c_0,\ \frac{c_1}{10},\ \frac{c_2}{10^2},\ldots\ldots\right),$$

которая называется *произведеніемъ* дробей a и b:

$$c=a.b,\ \text{или}\ c=ab.$$

Такъ какъ перестановительный законъ умноженія справедливъ для цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, то произведенія $a.b$ и $b.a$ приводятся къ одной и той же совокупности m. Поэтому

$$a.b=b.a.$$

Точно такъ же убѣдимся, что

$$(a.b).c=a.(b.c)$$

и

$$(a+b).c = a.c + b.c.$$

Если a или b равны нулю, то всѣ элементы совокупности m равны нулю и потому

$$a.b = 0.$$

Предположимъ, что a не $= 0$ и b не $= 0$. Въ такомъ случаѣ при нѣкоторыхъ p и q имѣемъ

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0, \ldots,\ a_{p-1} = 0,\ a_p \text{ не} = 0,$$

$$b_0 = 0,\ b_1 = 0, \ldots,\ b_{q-1} = 0,\ b_q \text{ не} = 0.$$

Совокупность m содержитъ элементъ $\frac{a_p b_q}{10^{p+q}}$ не равный нулю. Поэтому m, а, слѣд., и $a.b$ не равно нулю.

Если $a > b$, то

$$a = b + d, \text{ и } d \text{ не} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что при c неравномъ нулю

$$ac = (b+d)\, c = bc + dc.$$

Такъ какъ dc не $= 0$, то

$$ac > bc.$$

Итакъ, если $a > b$ и $c > 0$, то

$$ac > bc.$$

Предположимъ, что данную безконечную десятичную дробь

$$a = \left(a_0,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2}, \ldots\right)$$

надо помножить на 10. По изложенному правилу получимъ совокупность

$$m = \left(10a_0,\ \frac{10a_1}{10},\ \frac{10a_2}{10^2},\ \frac{10a_3}{10^3}, \ldots\right)$$

равную безконечной десятичной дроби

$$\left(10a_0 + a_1, \frac{a_2}{10}, \frac{a_3}{10^3}, \ldots\right).$$

Этотъ результатъ обыкновенно обозначаютъ такимъ образомъ. Если

$$a = a_0 + 0,\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots,$$

то

$$10a = 10a_0 + a_1 + 0,\ a_2\, a_3 \ldots$$

Если, напр.,

$$a = 35{,}172304\ldots,$$

то

$$10a = 351{,}72304\ldots$$

Дана безконечная десятичная дробь

$$a = 0{,}151515\ldots$$

На основанiи вышесказаннаго

$$10a = 1{,}51515\ldots,$$

$$100a = 15{,}1515\ldots$$

Изъ опредѣленiя суммы слѣдуетъ, что

$$15{,}1515\ldots = 15 + 0{,}1515\ldots,$$

и потому

$$100a = 15 + a,$$

$$99a = 15,$$

$$33a = 5.$$

Слѣд.,

$$a = \frac{5}{33}.$$

При помощи подобныхъ разсужденiй можно убѣдиться, что *всякая перiодическая десятичная дробь равняется частному отъ дѣленiя двухъ цѣлыхъ чиселъ.*

§ 10. *Дѣленіе.* Даны двѣ безконечныхъ десятичныхъ дроби a и b, гдѣ b не $= 0$. Докажемъ, что существуетъ такая безконечная десятичная дробь c, что

$$b.c = a.$$

Такая дробь c наз. *частнымъ* отъ дѣленія a на b:

$$c = a:b, \text{ или } c = \frac{a}{b}.$$

Такъ какъ

$$b = \left(b_0, \frac{b_1}{10}, \frac{b_2}{10^2}, \ldots\right)$$

не равно нулю, то по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ

$$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

не $= 0$. Предположимъ, что

$$b_0 = 0, \; b_1 = 0, \ldots, \; b_{k-1} = 0, \; b_k \text{ не} = 0.$$

Найдется такое цѣлое положительное число N, что

$$bN > a.$$

Такъ какъ

$$b > \frac{b_k}{10^k}, \; a_0 + 1 > a,$$

то требуемое неравенство будетъ удовлетворено, если

$$\frac{b_k}{10^k} N > a_0 + 1,$$

т.-е. если

$$N > \frac{(a_0 + 1).10^k}{b_k}.$$

Въ ряду безконечныхъ десятичныхъ дробей

$$b.0, \; b.1, \; b.2, \ldots, \; b.N$$

найдутся такіе два члена

$$b.c_0 \text{ и } b.(c_0 + 1),$$

что

$$b.c_0 \leqq a,\ b.(c_0+1) > a.$$

Если $b.c_0 = a$, то $c = c_0$ и наша задача рѣшена.

Если же $b.c_0 < a$, то въ ряду

$$b.c_0,\ b.\left(c_0+\frac{1}{10}\right), \ldots,\ b.\left(c_0+\frac{9}{10}\right),\ b.(c_0+1)$$

найдутся такіе два члена

$$b.\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right),\ b.\left(c_0+\frac{c_1+1}{10}\right),$$

гдѣ $c_1 \leqq 9$, что

$$b.\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right) \leqq a,\ b.\left(c_0+\frac{c_1+1}{10}\right) > a.$$

Если

$$b.\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right) = a,$$

то вычисленіе окончено.

Если же

$$b.\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right) < a,$$

то изложенный процессъ необходимо продолжить далѣе.

Въ результатѣ получается безконечная десятичная дробь

$$c = \left(c_0,\ \frac{c_1}{10},\ \frac{c_2}{10^2}, \ldots\right),$$

обладающая тѣмъ свойствомъ, что

$$b.C_n \leqq a,\ b.\left(C_n+\frac{1}{10^n}\right) > a.$$

Если при нѣкоторомъ n

$$b.C_n = a,$$

то $c = C_n$ и

$$b.c = a.$$

Предположимъ, что при всякомъ n

$$b.C_n < a,\ b.\left(C_n+\frac{1}{10^n}\right) > a.$$

Докажемъ, что и въ этомъ случаѣ

$$b\,.\,c = a.$$

Такъ какъ

$$c \leqq C_n + \frac{1}{10^n},\ a > b\,.\,C_n,$$

то

$$b\,.\,c - a < b\,.\left(C_n + \frac{1}{10^n}\right) - b\,.\,C_n,$$

или

$$b\,.\,c - a < b \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Изъ неравенствъ

$$c \geqq C_n,\ a < b\,.\left(C_n + \frac{1}{10^n}\right)$$

слѣдуетъ, что

$$b\,.\,c - a > b\,.\,C_n - b\,.\left(C_n + \frac{1}{10^n}\right),$$

или

$$b\,.\,c - a > -b \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Такъ какъ $b < b_0 + 1$, то полученныя два неравенства можно замѣнить однимъ

$$|b\,.\,c - a| < (b_0 + 1) \cdot \frac{1}{10^n},$$

лѣвая часть котораго есть абсолютное значенiе разности $b\,.\,c - a$.

Если $b\,.\,c - a$ не равно нулю, то въ безконечной десятичной дроби

$$|b\,.\,c - a| = \left(d_0,\ \frac{d_1}{10},\ \frac{d_2}{10^2}, \ldots\right)$$

при нѣкоторомъ k

$$d_0 = 0,\ d_1 = 0, \ldots,\ d_{k-1} = 0,\ d_k \text{ не} = 0.$$

Такъ какъ

$$|b\,.\,c - a| \geqq \frac{d_k}{10^k},$$

то мы получаемъ, что при всякомъ n

$$\frac{d_k}{10^k} < \frac{b_0 + 1}{10^n},$$

или

$$10^n < \frac{(b_0 + 1) . 10^k}{d_k},$$

что невозможно. Слѣдовательно,

$$bc = a.$$

Если a и b цѣлыя числа и a не дѣлится на b, то c — конечная или безконечная десятичная дробь.

Предположимъ, что c конечная десятичная дробь, содержащая m десятичныхъ знаковъ. Въ такомъ случаѣ

$$10^m . c = d,$$

гдѣ d цѣлое число. Изъ равенства

$$b . c = a$$

слѣдуетъ

$$b . d = 10^m . a.$$

Такъ какъ можно предполагать, что a простое съ b, то изъ полученнаго равенства слѣдуетъ, что 10^m дѣлится на b и, слѣд., b не содержитъ другихъ простыхъ дѣлителей кромѣ 2 и 5.

Отсюда заключаемъ, что c не можетъ быть конечною десятичною дробью, если b дѣлится на простое число, отличное отъ 2 и 5. Въ этомъ случаѣ ни одинъ изъ членовъ ряда

$$c, \ 10 . c, \ 10^2 . c, \ 10^3 . c, \ldots .$$

не равенъ цѣлому числу.

Предположимъ, что

$$c = d_0 + e_0, \ 10 . c = d_1 + e_1, \ 10^2 . c = d_2 + e_2, \ldots .$$

гдѣ d_0, d_1, d_2,.... цѣлыя числа, а e_0, e_1, e_2,.... безконечныя десятичныя дроби меньшія единицы. По умноженіи на b получимъ

$$a = bd_0 + be_0, \quad 10 . a = bd_1 + be_1, \quad 10^2 . a = b . d_2 + be_2, \ldots .$$

Здѣсь be_0, be_1, be_2, ... цѣлыя положительныя числа меньшія b.

Каждый изъ b членовъ ряда

$$be_0, \ be_1, \ be_2, \ldots, \ be_{b-1}$$

можетъ имѣть одно изъ $b-1$ различныхъ значеній

$$1, \ 2, \ 3, \ldots, \ b-1.$$

Поэтому по крайней мѣрѣ два члена нашего ряда равны между собой. Предположимъ, что

$$be_p = be_{p+q}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$e_p = e_{p+q}.$$

Если

$$e_0 = 0, \ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \ldots,$$

то

$$e_1 = 0, \ \alpha_2 \alpha_3, \ldots, \ e_2 = 0, \ \alpha_3 \alpha_4 \ldots$$

и, слѣд.,

$$\alpha_{p+q+1} = \alpha_{p+1}, \ \alpha_{p+q+2} = \alpha_{p+2}, \ldots,$$

т.-е. c періодическая десятичная дробь, содержащая q цифръ въ періодѣ.

Итакъ получаемъ теорему:

Частное двухъ цѣлыхъ чиселъ не можетъ равняться безконечной непеpіодической десятичной дроби.

§ 11. *Возвышеніе въ степень и извлеченіе корня.* Произведеніемъ безконечныхъ десятичныхъ дробей $b . c . d . e$ наз. результатъ, получаемый такимъ образомъ:

$$b . c . d . e = [(b . c) . d] . e.$$

Если мы имѣемъ m множителей, изъ которыхъ каждый есть c, то результатъ умноженія наз. *степенью* и обозначается: c^m.

Предположимъ, что дана безконечная десятичная дробь a неравная нулю. Докажемъ, что существуетъ такая безконечная десятичная дробь c, что

$$c^m = a.$$

Здѣсь c называется *корнемъ* m *— ой степени* изъ a.

Прежде всего убѣдимся, что при нѣкоторомъ цѣломъ положительномъ N неравномъ единицѣ будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$N^m > a.$$

Воспользуемся тожествомъ

$$\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} = \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\beta + \alpha^{m-3}\beta^2 + \ldots + \beta^{m-1}.$$

Полагая $\alpha = N$, $\beta = 1$, получимъ

$$\frac{N^m - 1}{N - 1} = N^{m-1} + N^{m-2} + N^{m-3} + \ldots + 1.$$

Такъ какъ $N > 1$, то отсюда слѣдуетъ

$$N^m - 1 > m(N - 1),$$

или

$$N^m > 1 + m(N - 1).$$

Неравенство $N^m > a$ будетъ удовлетворено, если

$$1 + m(N - 1) > a,$$

т.-е., если

$$N > 1 + \frac{a - 1}{m}.$$

Такъ какъ $0^m < a$ и $N^m > a$, то въ ряду

$$0^m,\ 1^m,\ 2^m, \ldots, (N-1)^m,\ N^m$$

найдутся такіе два члена

$$c_0^m,\ (c_0+1)^m,$$

что

$$c_0^m \leqq a,\ (c_0+1)^m > a.$$

Если

$$c_0^m = a,$$

то $c = c_0$, и теорема доказана.

Если же $c_0^m < a$, то разсмотримъ рядъ членовъ

$$c_0^m,\ \left(c_0+\frac{1}{10}\right)^m,\ \left(c_0+\frac{2}{10}\right)^m, \ldots,\ \left(c_0+\frac{9}{10}\right)^m,\ (c_0+1)^m.$$

При нѣкоторомъ c_1

$$\left(c_0+\frac{c_1}{10}\right)^m \leqq a,\ \left(c_0+\frac{c_1+1}{10}\right)^m > a.$$

Продолжая эти разсужденія, мы убѣдимся, что существуетъ безконечная десятичная дробь

$$c = \left(c_0,\ \frac{c_1}{10},\ \frac{c_2}{10^2}, \ldots\right),$$

обладающая тѣмъ свойствомъ, что при всякомъ n

$$C_n^m \leqq a,\ \left(C_n+\frac{1}{10^n}\right)^m > a.$$

Если при нѣкоторомъ n

$$C_n^m = a,$$

то

$$c = C_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c^n}{10^n},$$

и теорема доказана.

Предположимъ, что при всякомъ n

$$C_n^m < a,\ \left(C_n+\frac{1}{10^n}\right)^m > a.$$

Такъ какъ

$$c \geqq C_n,\ a < \left(C_n+\frac{1}{10^n}\right)^m,$$

то

$$c^m - a > C_n^{\,m} - \left(C_n + \frac{1}{10^n}\right)^m.$$

Изъ неравенствъ

$$c \leqq C_n + \frac{1}{10^n}, \quad a > C_n^{\,m}$$

слѣдуетъ

$$c^m - a < \left(C_n + \frac{1}{10^n}\right)^m - C_n^{\,m}.$$

Если въ соотношеніи

$$\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} = \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\,\beta + \alpha^{m-3}\,\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{m-2} + \beta^{m-1}$$

предположимъ, что

$$\alpha > \beta > 0,$$

то получимъ

$$\alpha^m - \beta^m < m\,(\alpha - \beta)\,\alpha^{m-1}.$$

На этомъ основаніи

$$\left(C_n + \frac{1}{10^n}\right)^m - C_n^{\,m} < m \cdot \frac{1}{10^n}\left(C_n + \frac{1}{10^n}\right)^{m-1}.$$

Такъ какъ

$$C_n + \frac{1}{10^n} \leqq c_0 + 1,$$

то

$$\left(C_n + \frac{1}{10^n}\right)^m - C_n^{\,m} < m \cdot \frac{1}{10^n}\,(c_0 + 1)^{m-1},$$

и потому

$$C_n^{\,m} - \left(C_n + \frac{1}{10^n}\right)^m > -m \cdot \frac{1}{10^n}\,(c_0 + 1)^{m-1}.$$

Изъ выше написанныхъ неравенствъ слѣдуетъ

$$m \cdot \frac{1}{10^n}\,(c_0 + 1)^{m-1} > c^m - a > -m \cdot \frac{1}{10^n}\,(c_0 + 1)^{m-1}.$$

Какъ видимъ, абсолютное значеніе разности $c^m - a$ можно сдѣлать сколь угодно малымъ. Отсюда вытекаетъ на основаніи разсужденій, изложенныхъ въ § 10, что

$$c^m - a = 0$$

и, слѣд.,

$$c^m = a.$$

При извлеченіи квадратнаго корня изъ 2 получается безконечная десятичная дробь

$$c = 1{,}4142\ldots.,$$

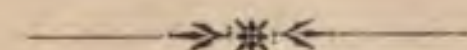
удовлетворяющая требуемымъ условіямъ. Слѣд.,

$$(1{,}4142\ldots.)^2 = 2.$$

§ 12. *Ирраціональныя числа.* Безконечныя десятичныя дроби можно назвать числами, такъ какъ ихъ можно между собой сравнивать и такъ какъ надъ ними можно производить ариѳметическія дѣйствія. Періодическая десятичная дробь, какъ намъ извѣстно (§ 9), есть отношеніе (ratio) двухъ цѣлыхъ чиселъ. Она называется числомъ *раціональнымъ*.

Неперіодическая безконечная десятичная дробь не можетъ получиться при дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ (§ 10). Она называется числомъ *ирраціональнымъ*.

Этимъ мы заканчиваемъ теорію безконечныхъ десятичныхъ дробей, которая вмѣстѣ съ тѣмъ есть теорія ирраціональныхъ чиселъ.



Цѣна **20** коп.

БИБЛИОТЕКА КЛАССИКОВ ТОЧНОГО ЗНАНИЯ. I

РИХАРД ДЕДЕКИНД
ПРОФЕССОР МАТЕМАТИКИ ВЫСШЕЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ В БРАУНШВЕЙГЕ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ
и
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ПЕРЕВЕЛ С НЕМЕЦКОГО
Проф. С. О. ШАТУНОВСКИЙ
СО СТАТЬЕЙ ПЕРЕВОДЧИКА:
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

4-ое ИСПРАВЛЕННОЕ ИЗДАНИЕ



ОДЕССА 1923

БИБЛИОТЕКА КЛАССИКОВ ТОЧНОГО ЗНАНИЯ. I.

РИХАРД ДЕДЕКИНД
ПРОФЕССОР МАТЕМАТИКИ ВЫСШЕЙ
ТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ В БРАУНШВЕЙГЕ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ
и
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ПЕРЕВЕЛ С НЕМЕЦКОГО
Проф. С. О. ШАТУНОВСКИЙ
СО СТАТЬЕЙ ПЕРЕВОДЧИКА:
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ
ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος
ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν
Платон

4-ое ИСПРАВЛЕННОЕ ИЗДАНИЕ



ОДЕССА 1923

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

От переводчика 5

Непрерывность и иррациональные числа

Предисловие автора 9
§ 1. Свойства рациональных чисел 12
§ 2. Сравнение рациональных чисел с точками прямой 14
§ 3. Непрерывность прямой линии 15
§ 4. Созидание иррациональных чисел 19
§ 5. Непрерывность области вещественных чисел 24
§ 6. Вычисления с вещественными числами 25
§ 7. Анализ бесконечных 29

Доказательство существования трансцендентных чисел

§ 1. Предварительные замечания 32
§ 2. Определение трансцендентного числа 37
§ 3. Понятие об исчислимом комплексе 38
§ 4. Комплекс вещественных алгебраических чисел 40

Третья Государственная Типография им. тов. Троцкого, ул. Ленина, № 49 в г. Одессе.

Р. О. П. № 51.
Заказ № 1907.
3000 экземпл.

RICHARD DEDEKIND

Stetigkeit und irrationale Zahlen

От переводчика

На числа мы прежде всего должны смотреть, как на ряд произвольно выбранных знаков...

H. von Helmholtz (Zählen u. Messen, 21).

Во всяком случае, число (numerus, ἀριθμός) есть произвольно созданный нами знак, который служит средством достижения весьма многообразных целей.

E. Schröder (Lehrbuch d. Arith. u. Alg., 2).

Если точно следить за тем, что мы делаем при счете количества (Menge oder Anzahl) вещей, то придем к рассмотрению способности духа относить вещи к вещам, ставить одну вещь в соответствие с другой, или отображать одну вещь в другой...

R. Dedekind (Was sind u. was sollen die Zahlen, VIII).

Приступая к переводу этого небольшого сочинения на русский язык, мы, с одной стороны, руководствовались назревшею у нас, как нам кажется, потребностью отдать себе ясный отчет в тех началах, которые лежат в основе арифметики вообще и арифметики иррациональных в частности; с другой стороны, нам казалось, что в маленькой брошюре Дедекинда яркая образность и высокая отвлеченность соединены в той мере, в какой это необходимо для того, чтобы уяснить читателю ход возникновения современной вполне отвлеченной идеи об иррациональном числе и возможность применения этой идеи к предметам более или менее кон-

кретного характера — к геометрическим образам. Наш перевод кажется нам тем более уместным, что в последнее время появились в переводе на русский язык работы Гельмгольца и Кронекера, посвященные научному обоснованию теории рациональных чисел. Знакомство с этой теорией существенно необходимо и для понимания Дедекиндовой теории иррациональных чисел. Особенно важен тот факт, что теория рациональных чисел может быть построена на определении чисел, как *знаков, символов*, которые расположены в установленной раз навсегда последовательности и которыми могут отмечаться некоторые соотношения между вещами. Сами по себе эти знаки могут быть какой угодно природы—это могут быть звуки, цвета, тела, понятия и т. д., распределенные в некотором неизменном порядке. Важность установления такой неизменной в своем порядке системы знаков заключается в „способности нашего духа", как говорит Дедекинд, устанавливать соответствие между этими знаками и индивидуумами какой бы то ни было группы вещей, благодаря чему мы вносим определенный порядок и в эту последнюю группу.

Когда при ближайшем исследовании вещей в них усматриваются такие свойства или соотношения, которые не могут характеризоваться установленными знаками-числами, то создают, если это выгодно, новые знаки такого рода, чтобы ими могли характеризоваться вновь усмотренные соотношения вещей. Можно, если угодно, называть числами и эти новые знаки, можно их так и не называть. Выгоднее, однако, бывает распространить термин „число" и на вновь вводимые символы. Таким образом, к ряду символов, названных целыми числами, были прежде всего присоединены новые символы, также названные числами, именно дробными числами. Этому дало повод то обстоятельство, что целыми числами нельзя или, по крайней мере, весьма неудобно характеризовать такие явления, которыми сопровождается распадение предмета на части. Когда при некоторых исследованиях оказывается удобнее считать предметы, расположенные в линейном порядке, не от крайнего (крайнего может и не быть), а от какого-либо промежуточного предмета, в обе

стороны от него, то представляется выгодным присоединить к прежним символам новые символы—отрицательные числа.

Мы не будем больше говорить об этом. Укажем только, что введение новых символов может обусловливаться не объективными свойствами вещей, к которым мы обыкновенно эти символы относим, а стремлением подчинить старые символы некоторым новым требованиям, несовместимым с теми свойствами этих символов, которые служили им определениями. Так, например, когда мы располагаем только тем рядом знаков, который мы называем системой рациональных чисел, и ищем число x (конечно, рациональное, ибо других чисел мы еще не установили), которого квадрат равен данному положительному числу a, то оказывается, что для некоторых a это число x существует, для других же его совсем нет, т. е. бывает так, что среди символов — рациональных чисел — нет такого, квадрат которого равен a. Мы можем в этом случае ввести в наши исследования новый символ, квадрат которого равен a, можем назвать и этот символ числом, например, радикальным числом, можем его обозначить через $a^{1/2}$, $\sqrt{a}$, или как-нибудь иначе. Можем всего этого и не делать. В последнем случае устанавливаем такую теорему: некоторые положительные числа имеют, другие не имеют квадратных корней; если же знаки квадратных корней из положительных чисел введены, то будем иметь такую теорему: каждое положительное число имеет квадратный корень. Обе теоремы верны, ибо в последней подразумевается, что те положительные числа, которые не имеют корней среди старых символов, имеют корни среди новых.

У самого Дедекинда определение числа, как символа, нигде явно не высказано, но такое определение числа явно вытекает из рассуждений, изложенных в другом его сочинении: Was sind und was sollen die Zahlen. По нашему мнению, существенно важно знать, что на иррациональные числа (так же, как и на всякие другие) можно смотреть, как на чистые знаки, которые могут быть и действительно бывают весьма полезны, между прочим, по той причине, что этими знаками удобно выражаются реальные свойства вещей.

Распределение чисел на два класса, на класс чисел алгебраических и класс трансцендентных чисел, представляет собою дальнейший шаг в теории развития понятия о числе. Мы сочли поэтому уместным присоединить к статье Дедекинда статью, которая содержала бы основную теорему, лежащую в основании этой классификации, — теорему о существовании трансцендентных чисел. Статья эта, напечатанная в свое время на страницах „Вестника опытной физики и элементарной математики“ (№ 233), содержит известное Канторово доказательство упомянутой теоремы.

Непрерывность и иррациональные числа

Предисловие автора

Рассуждения, составляющие предмет этого маленького сочинения, относятся к осени 1858 года. Тогда я, в качестве профессора Союзного Политехникума в Цюрихе, в первый раз обязан был по своему положению излагать элементы дифференциального исчисления и при этом чувствовал живее, чем когда-либо, недостаток в действительно научном обосновании арифметики. При изложении понятия о приближении переменной величины к постоянному пределу, и именно при доказательстве того положения, что величина, которая возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, должна приближаться к некоторому пределу, я прибегал к геометрической наглядности. Да и теперь я из дидактических оснований считаю такое привлечение геометрической наглядности при первом обучении дифференциальному исчислению необычайно полезным, даже неизбежным, если не хотят потратить слишком много времени. Но никто не станет отрицать того, что этот способ введения в изучение дифференциального исчисления не может иметь никакого притязания на научность.

Во мне тогда это чувство неудовлетворенности преобладало в такой степени, что я принял твердое решение думать до тех пор, пока не найду чисто арифметического и вполне строгого основания для начал анализа бесконечных. Говорят часто, что дифференциальное исчисление занимается непрерывными величинами, однако же нигде не дают определения этой непрерывности, и даже при самом строгом изложении дифференциального исчисления доказательства

не основывают на непрерывности, а апеллируют, более или менее сознательно, либо к геометрическим представлениям, либо к представлениям, которые берут свое начало в геометрии, либо, наконец, основывают доказательства на положениях, которые сами никогда не были доказаны чисто арифметическим путем. Сюда относится, например, и вышеупомянутое положение. Более точное изыскание убедило меня в том, что это или всякое другое эквивалентное ему предложение может до известной степени рассматриваться, как достаточный фундамент для анализа бесконечных. Все сводится только к тому, чтобы открыть настоящее начало этого положения в элементах арифметики и вместе с этим приобрести действительное определение существа непрерывности. Это мне удалось 24 ноября 1858 года, и, несколько дней спустя, я сообщил результаты своих размышлений моему дорогому другу Durège'у, что повело к продолжительной и оживленной беседе. Впоследствии я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал также об этом предмете доклад в ученом обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение представляется не легким, и потому еще, что и самый предмет так мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта, в то время, как я наполовину стал уже подумывать о том, чтобы избрать эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения *), ко мне в руки попала, благодаря любезности ее автора, статья E. Heine (Crelle's Journal. Bd. 74), которая и подкрепила меня в моем решении. По существу я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что мое изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время, как я писал это предисловие (20 марта 1872 г.), я получил интересную статью „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ G. Cantor'a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neu-

*) Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца.
Примеч. переводчика.

mann, Bd. 5), за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется при быстром чтении, аксиома в § 2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения, с тем, что я отмечаю ниже в § 3, как сущность непрерывности. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел еще более высокого порядка, я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, еще признать не в состоянии.

---

§ 1. Свойства рациональных чисел

Хотя арифметика рациональных чисел предполагается здесь уже известной, но мне думается, что полезно будет выдвинуть некоторые главные моменты, не подвергая их обсуждению, с тою только целью, чтобы заранее наметить точку зрения, на которую я становлюсь в последующем изложении. Я смотрю на всю арифметику, как на необходимое или, по крайней мере, натуральное следствие простейшего арифметического акта—счета, самый же счет представляет не что иное, как последовательное созидание бесконечного ряда положительных целых чисел, где каждый индивидуум определяется непосредственно ему предшествующим. Простейший акт заключается в переходе от созданного уже индивидуума к следующему, вновь созидаемому. Уже сама по себе цепь этих чисел образует необычайно полезное вспомогательное средство для человеческого ума и представляет неиссякаемое богатство замечательных законов, к которым мы приходим посредством введения четырех основных арифметических действий. Сложение есть соединение в один акт упомянутых простейших актов, повторенных сколько угодно раз. Таким же образом из сложения проистекает умножение. Между тем, как обе эти операции всегда выполнимы, выполнимость обратных операций — вычитания и деления—оказывается ограниченной. Каков бы ни был здесь ближайший повод, какие бы сравнения и аналогии с опытом и наблюдением ни приводили к этому,—вопрос об этом мы оставим в стороне; достаточно того, что именно эта ограниченность в выполнении обратных операций всякий раз становилась настоящей причиной нового творческого акта. Так созданы человеческим умом отрицательные и дроб-

ные числа, благодаря чему приобретено было орудие бесконечно более высокого совершенства в виде системы всех рациональных чисел. Эта система, которую я обозначу через R, обладает прежде всего тою полнотою и законченностью, которую я в другом месте *) отметил, как признак *числового корпуса* (Zahlkörper), и которая состоит в том, что четыре основные операции со всякими двумя индивидуумами из R выполнимы, то есть, что результатом этих операций всегда опять является определенный индивидуум из R, если только исключить единственный случай деления на нуль.

Для нашей ближайшей цели гораздо более важным является другое свойство системы R, которое может быть выражено так: система R представляет правильно распределенную, бесконечно простирающуюся в две стороны область одного измерения. Что́ именно этим хотят сказать—достаточно указывается выбором выражений, заимствованных из области геометрических представлений; тем более необходимо поэтому выделить соответствующие им чисто арифметические особенности — чтобы не могло даже только казаться, будто арифметика нуждается в таких чуждых ей представлениях.

Если нужно выразить, что знаки a и b означают одно и то же рациональное число, то полагают одинаково $a = b$ и $b = a$. Различие двух рациональных чисел сказывается в том, что разность $a - b$ имеет или положительное, или отрицательное значение. В первом случае a *больше* b, b *меньше* a, что и указывается знаками $a > b$, $b < a$**). Так как во втором случае $b - a$ имеет положительное значение, то $b > a$, $a < b$. Сообразно с этой двойственностью в характере различия двух чисел a и b, имеют место следующие законы:

I. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$. Всякий раз, когда a, c будут два различных (или неравных) числа и когда b будет больше одного и меньше другого, мы, не опасаясь отголоска

*) Vorlesungen über Zahlenteorie von P. G. Lejeune-Dirichlet. Zweite Auflage. § 159.

**) В последующем подразумевается так называемое „алгебраическое“ больше и меньше, если только не прибавлено слово „абсолютно“.

геометрических представлений, будем это выражать так: b лежит между обоими числам и a, c.

II. Если a, c суть два различных числа, то всегда существует бесконечное множество чисел, лежащих между a, c.

III. Если a есть определенное число, то все числа системы R распадаются на два класса A_1 и A_2, из коих каждый содержит бесконечно много индивидуумов. Первый класс A_1 обнимает собой все те числа a_1, которые меньше a; второй класс A_2 обнимает собою все числа a_2, которые больше a. Само число a может быть отнесено по произволу к первому или ко второму классу и тогда оно соответственно бывает наибольшим числом в первом классе или наименьшим числом во втором. В обоих случаях разложение системы R на два класса A_1, A_2 таково, что каждое число первого класса A_1 меньше каждого числа второго класса A_2.

§ 2. Сравнение рациональных чисел с точками прямой линии

Поставленные нами на вид свойства рациональных чисел напоминают о взаимном относительном положении точек прямой линии L. Если различать два принадлежащие ей противоположные направления словами „вправо“ и „влево“, и если p, q—две различные точки, то либо точка p расположена вправо от q, и в то же время q влево от p, или, наоборот, q—вправо от p, и в то же время p влево от q. Третий случай невозможен, если p и q действительно различные точки. Сообразно с этим различием в положении имеют место следующие законы:

I. Если p лежит вправо от q и q опять вправо от r, то и p лежит вправо от r; говорят тогда, что q лежит между точками p и r.

II. Если p, r две различные точки, то существует бесконечное множество точек, лежащих между p и r.

III. Если p есть определенная точка на L, то все точки на L распадаются на два класса P_1, P_2, из коих каждый содержит бесконечное множество индивидуумов. Первый класс P_1 обнимает собою все те точки p_1, которые лежат вправо от p, а второй класс P_2 обнимает все точки, которые

лежат влево от p. Сама точка p может быть отнесена по произволу к первому или ко второму классу. В обоих случаях разложение прямой L на два класса или два куска таково, что каждая точка первого класса P_1 лежит влево от каждой точки второго класса P_2.

Эта аналогия между рациональными числами и точками прямой становится, как известно, действительною зависимостью, когда на прямой выбирают определенную начальную или нулевую точку o и определенную единицу длины для измерения отрезков. При помощи последней можно для каждого рационального числа a построить соответствующую длину, и если нанести ее на прямую от точки o вправо или влево, смотря по тому, есть ли a положительное или отрицательное число, то получим определенную конечную точку p, которая может быть принята за точку, соответствующую числу a. Рациональному числу нуль соответствует точка o. Таким образом, каждому рациональному числу a, т. е. каждому индивидууму в R, соответствует одна и только одна точка p, то-есть, один индивидуум на L. Если двум числам a, b отвечают две точки p, q и если $a > b$, то p лежит вправо от q. Законам. I, II, III предыдущего параграфа вполне отвечают законы I, II, III настоящего.

§ 3. Непрерывность прямой линии

Но теперь фактом величайшей важности является то обстоятельство, что на прямой L есть бесконечно много точек, которые не соответствуют никакому рациональному числу. Действительно, если точка p соответствует рациональному числу a, то, как известно, длина op соизмерима с употребленной при построении единицей длины, то есть существует третья длина, так называемая общая мера, относительно которой обе длины представляются целыми кратными. Но уже древние греки знали и доказали, что существуют длины, несоизмеримые с данной единицей длины,— например, диагональ квадрата, сторона которого есть единица длины. Если нанести такую длину от точки o на прямую, то получим конечную точку, которой не соответствует никакое рациональное число. Так как легко далее показать, что существует

бесконечное множество длин, несоизмеримых с единицей длины, то можем утверждать: прямая L бесконечно более богата индивидуумами-точками, чем область R рациональных чисел индивидуумами-числами.

Если же хотят, а это в самом деле желательно, исследовать также все явления на прямой и арифметическим путем, то, в виду недостаточности для этой цели рациональных чисел, становится необходимым существенно улучшить построенный путем созидания рациональных чисел инструмент R, создав новые числа таким образом, чтобы область чисел приобрела ту же полноту, или, скажем прямо, ту же *непрерывность*, как и прямая линия.

Приведенные до сих пор соображения всем так хорошо известны, что многие сочтут их повторение совершенно излишним.

Однако же, я нахожу их краткое обозрение необходимым для того, чтобы надлежащим образом подготовить главный вопрос. Принятое до сих пор введение иррациональных чисел связывается именно с понятием о протяженных величинах — которое само нигде до сих пор не определено — и определяет число, как результат измерения такой величины другою того же рода *). Вместо этого я требую, чтобы арифметика развивалась сама из себя. Можно в общем согласиться с тем, что такие связи с неарифметическими представлениями дали ближайший повод к расширению понятия о числе (хотя это решительно не имело места при введении комплексных чисел), но это безусловно не может служить достаточным основанием для того, чтобы ввести в арифметику, науку о числах, эти чуждые ей соображения. Как отрицательные и дробные рациональные числа созданы путем свободного творчества, и как вычисления с этими числами должны были и могли быть сведены к законам вы-

*) Кажущееся преимущество общности такого определения числа исчезает тотчас же, как только подумаешь о комплексных числах. Наоборот, по моему воззрению, понятие отношения двух однородных величин тогда только может быть ясно развито, когда иррациональные числа уже введены.

Примеч. переводчика.

числений с положительными целыми числами, точно так же должно стремиться к тому, чтобы иррациональные числа были вполне определены через посредство рациональных чисел. Но как это сделать — вот в чем вопрос.

Предыдущее сравнение области R рациональных чисел с прямою привело к открытию в первой изъянов (Lückenhaftigkeit), неполноты, или разрывности, между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чем же, собственно, состоит эта непрерывность? Все и заключается в ответе на этот вопрос, и только в этом ответе мы приобретаем научное основание для исследования *всех* непрерывных областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малейших частиц, конечно, ничего не достигнешь. Дело идет о том, чтобы дать точный признак непрерывности, который мог бы служить базисом действительных дедукций. Долгое время я напрасно об этом думал, но, наконец, нашел искомое. Разные лица, вероятно, оценят эту находку различно, но все же я думаю, что большинство найдет ее содержание весьма тривиальным. Оно состоит в следующем: в предыдущих параграфах обращено было внимание на то, что каждая точка p прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, то-есть, в следующем:

„Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска“ *).

*) То-есть, если, следуя какому бы то ни было закону (правилу), например, подчиняясь условиям некоторой задачи, мы произведем разделение точек прямой на два класса таким образом, что 1) каждая точка прямой принадлежит либо к тому, либо к другому классу, и 2) каждая точка одного класса расположена влево от каждой точки другого класса, то существует одна и только одна точка такого свойства, что каждая точка, влево от нее лежащая, принадлежит к одному классу, а все остальные точки прямой принадлежат к другому классу. Если бы мы разорвали прямую, т. е. удалили бы из нее отрезок AB

Если возьмем для второго класса A_2 каждое положительное рациональное число, которого квадрат $> D$, а для первого класса A_1 все остальные рациональные числа, то это подразделение составит сечение (A_1, A_2), то-есть, каждое число a_1 будет меньше каждого числа a_2. Именно, когда $a_1 = 0$ или есть отрицательное число, то уже в силу этого a_1 меньше каждого числа a_2, ибо это последнее, по определению, представляет собой положительное число. Если же a_1 есть число положительное, то его квадрат $\leq D$, и, следовательно, a_1 меньше каждого числа a_2, которого квадрат $> D$.

Это сечение не производится, однако, никаким рациональным числом. Чтобы доказать это, должно прежде всего обнаружить, что нет никакого рационального числа, которого квадрат равен D. Хотя это и известно из первых элементов теории чисел, но мы все же находим возможным уделить место следующему косвенному доказательству. Если есть рациональное число, которого квадрат $= D$, то существуют и два положительных целых числа t и u, которые удовлетворяют уравнению

$$t^2 - D u^2 = 0,$$

и можно принять, что u есть *наименьшее* положительное целое число, обладающее тем свойством, что его квадрат через умножение на D обращается в квадрат некоторого целого числа t. Так как, очевидно *),

$$\lambda u < t < (\lambda + 1) u,$$

то число

$$u_1 = t - \lambda u$$

есть положительное целое число и притом меньшее, чем u. Если, далее, положить

$$t_1 = D u - \lambda t,$$

то и t_1 будет положительное **) целое число, причем получаем

*) Число t не может быть кратным числа u, ибо в противном случае мы, обозначая через λ положительное целое, имели бы $t = \lambda u$; $\lambda^2 u^2 - D u^2 = 0$ или $D = \lambda^2$, что недопустимо, так как D не точный квадрат. Отсюда следует, что t содержится между некоторыми двумя последовательными членами λu и $(\lambda + 1) u$ ряда $u, 2u, 3u, \ldots$

Примеч. переводчика.

**) Ибо $t_1 u = D u^2 - \lambda t u = t^2 - \lambda t u = t(t - \lambda u) = t u_1$.

Примеч. переводчика.

$$t^2_1 - Du^2_1 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

что противоречит допущению, сделанному относительно u.

Таким образом, квадрат всякого рационального числа a или $< D$, или $> D$. Отсюда легко выводится, что в классе A_1 нет наибольшего, а в классе A_2 нет наименьшего числа. Действительно, если положить

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

то

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

и

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Если взять здесь для x положительное число из класса A_1, то $x^2 < D$, следовательно, $y > x$ и $y^2 < D$; поэтому y также принадлежит к классу A_1. Если же положить, что x есть число из класса A_2, то $y < x$; $x > 0$ и $y^2 > D$, так что и y принадлежит к классу A_2. Это сечение не производится, следовательно, никаким рациональным числом.

В том свойстве, что не все сечения производятся рациональными числами, и состоит неполнота, или разрывность, области R рациональных чисел.

Теперь всякий раз, когда нам дано сечение (A_1, A_2), которое не может быть произведено никаким рациональным числом, мы *создаем* новое *иррациональное* число α, которое рассматривается нами, как вполне определенное этим сечением (A_1, A_2). Мы скажем, что число α соответствует этому сечению, или что оно производит это сечение. Таким образом, отныне каждому определенному сечению соответствует одно и только одно рациональное или иррациональное число, и мы будем смотреть на два числа, как на *различные* или *неравные*, тогда и только тогда, когда они соответствуют существенно различным сечениям.

Чтобы найти основание для распределения всех *вещественных*, т. е. всех рациональных и иррациональных чисел, нам необходимо прежде всего исследовать соотношения

между двумя какими-либо сечениями (A_1, A_2) и (B_1, B_2), производимыми какими угодно двумя числами α и β. Всякое сечение (A_1, A_2), очевидно, дано вполне уже в том случае, когда мы знаем один из двух классов, например, первый класс A_1, потому что второй A_2 состоит из всех рациональных чисел, не заключающихся в классе A_1; характерной же особенностью этого первого класса является то, что, заключая в себе какое-либо число a_1, он содержит и все числа, меньшие a_1. Если теперь сравнить два первых класса этого рода A_1 и B_1, то может случиться, 1) что они вполне тождественны, т. е. каждое число, содержащееся в A_1, содержится также и в B_1, и каждое число, содержащееся в B_1, содержится и в A_1. В этом случае A_2 необходимо тождественно с B_2; оба сечения вполне тождественны, что мы знаками выражаем через $\alpha = \beta$, или $\beta = \alpha$.

Но если два класса A_1 и B_1 не тождественны, то в одном, например, в A_1, есть число $a'_1 = b'_2$, не содержащееся в классе B_1 и заключающееся, следовательно, в B_2; поэтому, все числа b_1, заключающиеся в B_1, несомненно, будут меньше, чем это число $a'_1 = b'_2$; следовательно, все числа b_1 заключаются и в A_1.

Если же 2) это число a'_1 будет единственным числом в A_1, не входящим в B_1, то всякое другое число a_1, содержащееся в A_1, будет содержаться и в B_1, а потому a_1 меньше a'_1, т. е. a'_1 есть наибольшее между числами a_1; поэтому сечение (A_1, A_2) производится рациональным числом $\alpha = a'_1 = b'_2$. Относительно второго сечения (B_1, B_2) мы уже знаем, что все числа b_1 класса B_1 содержатся и в A_1, а потому они меньше, чем число $a'_1 = b'_2$, которое содержится в B_2; всякое же другое число b_2, содержащееся в B_2, должно быть больше, чем b'_2, потому что иначе b_2 было бы также меньше, чем a'_1, и заключалось бы в A_1, а следовательно, и в B_1. Таким образом, b'_2 есть наименьшее между числами, содержащимися в B_2; следовательно, и сечение (B_1, B_2) производится тем же рациональным числом $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$. Оба сечения поэтому несущественно различны.

Но если 3) в A_1 есть, по крайней мере, два различных рациональных числа $a'_1 = b'_2$ и $a''_1 = b''_2$, не содержащихся

в B_1, то их существует и бесконечное множество, потому что все бесконечное множество чисел, лежащих между a_1' и a_1'' (§ 1, II), содержится, очевидно, в A_1, но не в B_1. Два числа α и β, соответствующие в этом случае существенно различным сечениям (A_1, A_2) и (B_1, B_2), мы также назовем *различными*, а именно скажем, что α *больше*, чем β, что β *меньше*, чем α, и выразим это в знаках как через $\alpha > \beta$, так и через $\beta < \alpha$. Здесь следует иметь в виду, что это определение вполне совпадает с прежним, когда оба числа α и β были рациональными.

Остаются еще следующие возможные случаи: если 4) в B_1 содержится одно и только одно число $b'_1 = a'_2$, не содержащееся в A_1, то оба сечения (A_1, A_2) и (B_1, B_2) только несущественно различны и производятся одним и тем же числом $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$. Если же 5) в B_1 есть, по крайней мере, два различных числа, не содержащихся в A_1, то $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Так как этим исчерпываются все случаи, то заключаем, что из двух различных чисел одно необходимо окажется большим, другое меньшим: здесь два возможных случая. Третий случай невозможен. Это заключалось уже в употреблении *сравнительной степени* (больше, меньше) для выражения отношения между α и β; но только теперь выбор такого выражения вполне оправдан. Именно при изысканиях такого рода необходимо самым заботливым образом остерегаться, чтобы, даже при всем желании быть честным, не увлечься и не сделать непозволительных перенесений из одной области в другую из-за поспешного выбора выражений, относящихся к другим, уже развитым представлениям.

Если снова точно обсудим случай $\alpha > \beta$, то найдем, что меньшее число β в том случае, когда оно рациональное, наверно принадлежит к классу A_1. Действительно, так как в A_1 есть число $a'_1 = b'_1$, принадлежащее к классу B_2, то независимо от того, будет ли β наибольшим числом в B_1 или наименьшим в B_2, наверное имеем $\beta \leq a'_1$ и, следовательно, β содержится в A_1. Точно так же из $\alpha > \beta$ выводится, что большее число α, когда оно рациональное, непременно содержится в B_2, ибо $\alpha \leq a'_1$. Соединяя оба соображения,

найдем следующий результат: если сечение (A_1, A_2) производится числом α, то всякое рациональное число принадлежит к классу A_1 или к классу A_2, смотря по тому, будет ли оно меньше или больше α. Если само число α рациональное, то оно может принадлежать к тому или другому классу.

Отсюда, наконец, вытекает еще и следующее: если $\alpha > \beta$, если, значит, существует бесчисленное множество чисел в A_1, не содержащихся в B_1, то существует среди них также бесконечное множество таких чисел, которые одновременно отличны и от α, и от β. Каждое такое рациональное число $c < \alpha$, ибо оно содержится в A_1, и в то же время оно $> \beta$, потому что содержится в B_2.

§ 5. Непрерывность области вещественных чисел

Сообразно с твердо установленными нами родами различия чисел, система $\mathfrak{R}$ всех вещественных чисел образует правильно распределенную область одного измерения. Этим сказано только то, что имеют место нижеследующие законы:

I. Если $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то и $\alpha > \gamma$. Мы будем говорить, что β лежит между числами α и γ.

II. Если α, γ суть два различных числа, то всегда существует бесконечное множество различных чисел, лежащих между числами α и γ.

III. Если α есть определенное число, то все числа системы $\mathfrak{R}$ распадаются на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, из коих каждый содержит бесконечно много индивидуумов. Первый класс $\mathfrak{A}_1$ обнимает собою все те числа α_1, которые $< \alpha$; второй класс $\mathfrak{A}_2$ обнимает все те числа α_2, которые $> \alpha$. Само число α может быть отнесено по произволу к первому или ко второму классу и тогда оно соответственно бывает наибольшим числом в первом или наименьшим во втором классе. В обоих случаях разложение системы $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ таково, что каждое число первого класса $\mathfrak{A}_1$ меньше каждого числа второго класса $\mathfrak{A}_2$, и мы говорим, что это разложение произведено числом α.

Чтобы быть кратким и не утомлять читателя, я опускаю доказательства этих положений, вытекающие непосредственно из определений предыдущих параграфов.

Кроме этих свойств, область $\mathfrak{R}$ обладает еще *непрерывностью*, то есть имеет место следующее предложение:

IV. Если система $\mathfrak{R}$ всех вещественных чисел распадается на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ такого рода, что каждое число α_1, класса $\mathfrak{A}_1$, меньше каждого числа α_2 класса $\mathfrak{A}_2$, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение.

Доказательство. Вместе с разложением или сечением $\mathfrak{R}$ на два класса $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ дается и некоторое сечение (A_1, A_2) системы R всех рациональных чисел, определяемое тем правилом, что A_1 содержит все рациональные числа класса $\mathfrak{A}_1$, а A_2 все остальные рациональные числа, то есть все рациональные числа класса $\mathfrak{A}_2$. Пусть α будет то вполне определенное число, которым производится это сечение (A_1, A_2). Если теперь β есть какое-либо число, отличное от α, то существует бесконечно много рациональных чисел c, которые лежат между α и β. Если $\beta < \alpha$, то $c < \alpha$; поэтому c принадлежит к классу A_1, а следовательно, и к классу $\mathfrak{A}_1$, но так как вместе с этим $\beta < c$, то и β принадлежит к тому же классу $\mathfrak{A}_1$, ибо каждое число в $\mathfrak{A}_2$ больше каждого числа c из $\mathfrak{A}_1$. Если же $\beta > \alpha$, то $c < \alpha$; поэтому c принадлежит к классу A_2, а следовательно, и к классу $\mathfrak{A}_2$; но так как вместе с этим $\beta > c$, то и β принадлежит к классу $\mathfrak{A}_2$, потому что каждое число в $\mathfrak{A}_1$ меньше каждого числа c из $\mathfrak{A}_2$. Таким образом, каждое число β, отличное от α, принадлежит или к классу $\mathfrak{A}_1$, или к классу $\mathfrak{A}_2$, смотря по тому, будет ли $\beta < \alpha$, или $\beta > \alpha$; следовательно, само α представляет либо наибольшее число в $\mathfrak{A}_1$, либо наименьшее в $\mathfrak{A}_2$, то есть, α есть некоторое и, очевидно, единственное число, производящее разложение системы $\mathfrak{R}$ на классы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Что и требовалось доказать.

§ 6. Вычисления с вещественными числами

Для того, чтобы вычисление с двумя вещественными числами α и β свести к вычислению с рациональными числами, нужно только по двум сечениям (A_1, A_2) и (B_1, B_2), производимым числами α и β в системе R, определить сечение (C_1, C_2), соответствующее результату γ вычисле-

ния *). Мы ограничимся здесь приведением простейшего примера —сложения.

Если c есть какое-либо рациональное число, то мы отнесем его к классу C_1, когда существует число a_1 в A_1 и число b_1 в B_1 такого рода, что $a_1 + b_1 \geq c$. Все другие числа c отнесем к классу C_2. Это подразделение всех рациональных чисел на два класса C_1 и C_2, очевидно, образует се-

*) Автор, очевидно, хотел сказать следующее: действия сложения, вычитания, умножения и деления определены были до сих пор только для рациональных чисел; для иррациональных же чисел эти действия не будут иметь смысла до тех пор, пока мы не условимся относительно того, какой именно смысл мы *желаем* им придавать в применении к иррациональным числам. Так, например, сумму двух иррациональных чисел нельзя определить ни как совокупность, в которой содержится столько единиц и аликвотных частей единицы, сколько их в двух слагаемых, вместе взятых, ни индуктивно, как это делал Грассман для целых чисел, ибо ни то, ни другое определение не имеет здесь смысла. Мы могли бы и совсем не употреблять термина „сумма" в применении к иррациональным числам, говоря, что иррациональные числа не имеют суммы, но делать такое или подобное ограничение было бы в высшей степени неудобно; с другой стороны, сообразуясь с выгодами соблюдения в одной и той же области знания так называемого правила перманентности в определении термина (по этому правилу всякое изменение в соозначении термина должно совершаться так, чтобы новое соозначение по возможности не только не противоречило прежнему, но заключало бы последнее, как частный случай), будет наиболее целесообразным определить термины основных действий над вещественными числами так, чтобы в своем новом соозначении эти термины могли быть относимы как к рациональным, так и к иррациональным числам, и чтобы, совершая над рациональными числами действия на основании нового их определения, мы всегда получали прежние результаты. Пусть γ будет результат совершения некоторого действия O над двумя произвольными рациональными числами α и β. Если найдем правило K, по которому, зная сечения, производимые числами α и β, мы всегда в состоянии найти сечение, производимое числом γ, то действие O можно будет определить, как процесс составления некоторого сечения по правилу K из сечений, производимых числами α и β. Такое определение действия O, имея смысл и в том случае, когда одно из чисел α и β или оба они иррациональны, обладает свойством перманентности. Процесс отыскания новых перманентных определений действий при переходе от рациональных чисел ко всей системе вещественных чисел автор называет приведением вычислений с вещественными числами к вычислениям с рациональными числами.

Примеч. переводчика.

чение, ибо всякое число c_1 в C_1 меньше каждого числа c_2 в C_2. Если теперь оба числа α, β рациональные, то каждое содержащееся в C_1 число $c_1 \leq \alpha + \beta$, ибо $a_1 \leq \alpha$ и $b_1 \leq \beta$, а потому и $a_1 + b_1 \leq \alpha + \beta$. Если бы, далее, в C_2 содержалось какое-либо число $c_2 < \alpha + \beta$, так что было бы $\alpha + \beta = c + p$, где p означает положительное число, то мы нашли бы, что

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p),$$

а это находится в противоречии с определением числа c_2, так как $\alpha - \frac{1}{2}p$ есть число из A_1, а $\beta - \frac{1}{2}p$ есть число из B_1. Таким образом, каждое содержащееся в C_2 число $c_2 \geq \alpha + \beta$; следовательно, сечение (C_1, C_2) образуется в этом случае суммой $\alpha + \beta$. Мы поэтому не погрешим против определения, которое имеет место в арифметике рациональных чисел, если во всех случаях будем разуметь под *суммой* $\alpha + \beta$ двух произвольных вещественных чисел α, β то число γ, посредством которого образуется сечение (C_1, C_2)*). Далее, если только одно из двух чисел α, β — например, α — рациональное, то легко убедиться, что на сумму $\gamma = \alpha + \beta$ не влияет то обстоятельство, отнесем ли мы α к первому классу A_1 или ко второму A_2.

Так же, как сложение, можно определить и остальные операции так называемой элементарной арифметики, а именно составление разности, произведения, степени, корня, логарифма. Таким образом можно придти к действительному доказательству теорем (как, например, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), которые, сколько я знаю, до сих пор нигде не доказаны. Слишком большие подробности, которых следует опасаться при определении более сложных операций, лежат частью в природе самого предмета, большею же частью они могут быть устранены. В этом отношении является весьма полезным понятие об *интервале*, т. е. системе A рациональных чисел, обладающих следующим характерным свойством: если a и a' суть числа системы A_1 то все рациональные числа, лежащие между a и a', содержатся в A. Система R раци-

*) Из сечений (A_1, A_2) и (B_1, B_2) по указанному только что способу.
Примеч. переводчика.

ональных чисел, а также и оба класса каждого ее сечения суть интервалы. Если существует рациональное число a_1, которое меньше каждого числа интервала A, и если есть рациональное число a_2, которое больше каждого числа интервала A, то A называется конечным интервалом; в этом случае существует, очевидно, бесконечное множество чисел такого же рода, как a_2. Вся область R распадается на три куска: A_1, A, A_2, причем появляются два вполне определенных рациональных или иррациональных числа α_1, α_2, которые соответственно могут быть названы нижней и верхней (или меньшей и большей) *границей* интервала A. Нижняя граница α_1 определяется сечением, в котором первый класс образован системой A_1, верхняя же граница α_2 определяется сечением, в котором A_2 образует второй класс. О всяком рациональном или иррациональном числе α, лежащем между α_1 и α_2, будем говорить, что оно лежит *внутри* интервала A. Когда все числа интервала A являются также числами интервала B, то A будет называться куском B.

Придется, повидимому, сделать еще большие отступления, когда желательно будет перенести бесчисленные предложения арифметики рациональных чисел [например, предложение, в силу которого $(a+b)c=ac+bc$] на произвольные вещественные числа. Это, однако, не так; скоро убеждаешься, что все здесь приводится к доказательству положения, по которому арифметические операции сами обладают некоторой непрерывностью. То, что я под этим понимаю, я облеку в форму общей теоремы.

„Если число λ есть результат вычислений, совершенных над числами α, β, γ,..., и если λ лежит внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C (внутри которых лежат числа α, β, γ,...) такого рода, что результат такого же вычисления, в котором, однако, числа α, β, γ,..., заменены любыми числами соответственных интервалов A, B, C,..., будет всегда представлять число, лежащее внутри интервала L“. Однако же, ужасная трудность, связанная со словесным изложением такой теоремы, убеждает нас в том, что здесь необходимо что-нибудь предпринять для того, чтобы придти в помощь языку: этого мы действительно до-

стигаем самым совершенным образом, когда вводим понятие *о переменных величинах, о функциях, о пределах.* Всего целесообразнее было бы основать на этих понятиях определения даже простейших арифметических операций, что здесь, однако, не может быть дальше проведено.

§ 7. Анализ бесконечных

В заключение мы уясним себе зависимость между приведенными до сих пор соображениями и основными положениями анализа бесконечных.

Говорят, что переменная величина x, пробегающая последовательные определенные численные значения, приближается к постоянному *пределу* α, если она в ходе процесса изменения *окончательно* *) заключается между каждыми двумя числами, между которыми α само лежит, или, что то же, если разность $x-\alpha$, взятая абсолютно, окончательно опускается ниже всякого данного значения, отличного от нуля.

Одно из важнейших предложений гласит так: „Если величина x возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, то она приближается к некоторому пределу“.

Я доказываю это предложение следующим образом: по предположению, существует одно, а следовательно, и бесчисленное множество чисел α_2 такого рода, что x постоянно остается $<\alpha_2$. Я обозначаю через $\mathfrak{A}_2$ систему всех этих чисел α_2 и через $\mathfrak{A}_1$ систему всех остальных чисел α_1; каждое из последних имеет то свойство, что впродолжение процесса изменения имеем окончательно $x \geq \alpha_1$; поэтому каждое число α_1 меньше каждого числа α_2 и, следовательно, существует число α, которое представляет собою или наибольшее в $\mathfrak{A}_1$, или наименьшее в $\mathfrak{A}_2$ (§ 5, IV). Первого быть не может, ибо x никогда не перестает возрастать, поэтому α есть наименьшее число в $\mathfrak{A}_2$. Какое бы число α_1 мы ни взяли,

*) Автор употребляет слово „definitiv“ = „определенно, решительно, окончательно“ в том смысле, что, приобретя какое-либо свойство в определенный момент своего изменения, переменная величина удерживает это свойство впродолжение всего остального хода процесса.
Примеч. переводчика.

рано или поздно будет окончательно $\alpha_1 < x < \alpha$, т. е. x приближается к пределу α.

Это предложение эквивалентно принципу непрерывности, то есть оно теряет свою силу, как только мы станем смотреть хотя бы на одно вещественное число, как на число, отсутствующее в области $\mathfrak{R}$; или, выражаясь иначе, если это предложение верно, то верна и теорема IV в § 5.

Другое предложение, также ему эквивалентное, но еще более часто встречающееся в анализе бесконечных, гласит так: „Если в процессе изменения величины x можно указать для каждой положительной величины δ соответствующий момент, начиная с которого x изменяется меньше, чем на δ, то x приближается к некоторому пределу".

Это обращение легко доказуемой теоремы, по которой переменная величина, приближающаяся к определенному пределу, изменяется, в конце концов, меньше, чем на любую данную положительную величину, может быть выведено как из предыдущего предложения, так и непосредственно из принципа непрерывности. Мы выберем последний путь. Пусть δ будет произвольная положительная величина (то есть $\delta > 0$); по предположению, наступает момент, начиная с которого x изменяется меньше, чем на δ, то есть, если в этот момент x обладает значением a, то впоследствии всегда $x > a - \delta$ и $x < a + \delta$. Я оставляю на время первоначальную гипотезу и держусь только сейчас доказанного факта, что все позднейшие значения переменной x лежат между конечными значениями, которые могут быть даны. На этом я основываю двойное подразделение всех вещественных чисел. К системе $\mathfrak{A}_2$ я отношу всякое число α_2 (например, $a + \delta$), обладающее тем свойством, что в ходе процесса x окончательно становится $\leq \alpha_2$; к системе $\mathfrak{A}_1$ я отношу всякое число, не содержащееся в $\mathfrak{A}_2$. Если α_1 есть такое число, то, как бы далеко процесс ни продолжался, случай $x > \alpha_1$ будет еще наступать бесчисленное множество раз *). Так как ка-

*) Ибо противное означало бы, что неравенство $x \leq \alpha_1$ справедливо *окончательно*, т. е. α_1 принадлежало бы к классу $\mathfrak{A}_2$.

Примеч. переводчика.

ждое число α_1 меньше каждого числа α_2 *), то существует вполне определенное число α, которым производится это сечение $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ системы $\mathfrak{R}$ и которое я буду называть верхним пределом переменной величины x, остающейся всегда конечною. Но характером изменений переменной x порождается также другое сечение $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ системы $\mathfrak{R}$: число β_1 (например, $a - \delta$) заключается в $\mathfrak{B}_1$, если впродолжение процесса окончательно $x \geq \beta_1$; всякое другое число β_2, подлежащее включению в $\mathfrak{B}_2$, имеет то свойство, что x никогда окончательно не становится $\geq \beta_2$, так что случай $x < \beta_2$ будет наступать еще бесчисленное множество раз. Число β, производящее это сечение, пусть называется нижним пределом переменной x. Оба числа α, β очевидно характеризуются следующим свойством: если ε есть произвольно малая положительная величина, то всегда будет окончательно $x < \alpha + \varepsilon$ и $x > \beta - \varepsilon$ но никогда не будет окончательно $x < \alpha - \varepsilon$ и $x > \beta + \varepsilon$. Теперь возможны два случая. Если α и β отличны друг от друга, то необходимо $\alpha > \beta$, ибо всегда $\alpha_2 \geq \beta_1$; переменная величина x колеблется и, как бы далеко процесс ни пошел, она все еще претерпевает изменения, значения которых превосходят $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$, где ε означает произвольно малую положительную величину. Первоначальная гипотеза, к которой я теперь только возвращаюсь, находится в противоречии с этим выводом; остается, поэтому, только второй случай $\alpha = \beta$, и так как уже доказано, что как бы мала ни была положительная величина ε, окончательно будет всегда $x < \alpha + \varepsilon$ и $x > \beta - \varepsilon$, то x приближается к пределу α, что и требовалось доказать.

Удовольствуемся этими примерами в изложении связи между принципом непрерывности и анализом бесконечных.

---

*) Потому что после того, как величина x *окончательно* стала $< \alpha_2$, она еще больше, или сделается еще больше, чем α_1.

Примеч. переводчика.

/

Доказательство существования трансцендентных чисел

(по Cantor'у)

Предварительные замечания

§ 1. Число N называется *алгебраическим*, когда оно удовлетворяет уравнению вида

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0 \ldots (1),$$

где показатель m есть положительное целое число, коэффициенты $a, a_1 \ldots a_{m-1}, a_m$ суть целые числа, а коэффициент a отличен от нуля.

В этом уравнении мы можем считать коэффициент a высшего члена положительным, ибо, допуская противное и меняя знаки всех членов уравнения, найдем, что число N удовлетворяет уравнению того же вида, но при этом коэффициент высшего члена есть уже положительное число. Можно также предположить, что общий наибольший делитель d всех коэффициентов уравнения равен единице, ибо, предположив d отличным от единицы и разделив обе части уравнения на d, найдем, что число N удовлетворяет уравнению вида (1) с коэффициентами, общий наибольший делитель которых равен единице.

Рассматривая алгебраические уравнения, мы всюду будем предполагать (если противное не оговорено), что эти уравнения приведены к виду (1) и что коэффициенты в этих уравнениях удовлетворяют условиям, установленным нами относительно коэффициентов уравнения (1).

Степень алгебраического уравнения, которому удовлетворяет алгебраическое число N, по определению, не может

быть меньше единицы, и, следовательно, имеет minimum. Зная это, докажем следующую теорему.

Теорема I. *Если алгебраическое уравнение*

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

есть уравнение наименьшей степени, удовлетворяющееся числом N, *и если полином* A *делится без остатка на полином*

$$B = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n,$$

в котором показатель n *и коэффициенты* $b, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n$ *удовлетворяют условиям, установленным соответственно относительно показателя* m *и коэффициентов полинома* A, *то полиномы* A *и* B *тождественно равны, то есть*

$$m = n;\ a = b;\ a_1 = b_1; \ldots\ a_{m-1} = b_{n-1};\ a_m = b_n.$$

Доказательство. Нельзя допустить, чтобы было $n > m$, ибо в этом случае полином A не мог бы делиться без остатка на полином B. Покажем также, что и неравенство $n < m$ невозможно. Когда $n < m$, то частное от деления полинома A на полином B представится в виде полинома

$$C = cx^{m-n} + c_1x^{m-n-1} + \cdots + c_{m-n-1}x + c_{m-n}$$

с рациональными коэффициентами, где $c = \frac{a}{b}$ есть положительное число.

Приведем все коэффициенты $c, c_1, \ldots, c_{m-n}$ к одному знаменателю q и допустим, что после этого их числители имеют общим наибольшим делителем число d. Полином C представится в виде

$$C = \frac{d}{q} C',$$

где

$$C' = c'x^{m-n} + c'_1x^{m-n-1} + \ldots + c'_{m-n-1}x + c'_{m-n}.$$

Показатель $m - n$ и коэффициенты $c', c'_1, \ldots, c'_{m-n}$ удовлетворяют теперь условиям, установленным относительно показателя и коэффициентов полинома A, и мы имеем тождественно:

$$A = \frac{d}{q} BC'.$$

Число N, обращая в нуль полином A при замещении x на N, должно обратить в нуль один из двух полиномов

B и C', что невозможно, ибо степени n и $m-n$ алгебраических уравнений $B=0$ и $C'=0$ меньше m, а уравнение $A=0$ есть алгебраическое уравнение наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x=X$.

Таким образом, необходимо допустить, что

$$m=n.$$

В этом случае частное от деления A на B равно $\frac{a}{b}$. Обозначив через $\frac{a'}{b'}$ несократимую дробь, равную $\frac{a}{b}$, будем иметь тождественно:

$$ax^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=\frac{a'}{b'}(bx^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m),$$

откуда

$$b'a=a'b;\ b'a_1=a'b_1;\ \ldots;\ b'a_m=a'b_m.$$

Принимая во внимание, что a' и b' взаимно простые числа, найдем из этих равенств, что каждое из чисел $a, a_1, \ldots, a_m$ имеет делителем число a', а каждое из чисел $b, b_1, \ldots, b_m$ имеет делителем число b'; следовательно, $a'=b'=1$. Но в таком случае предыдущие равенства обращаются в

$$a=b;\ a_1=b_1;\ \ldots;\ a_m=b_m,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если полином* A *делится без остатка на полином*

$$B'=b'x^n+b'_1x^{n-1}+\ldots+b'_n,$$

где n есть положительное целое, b', $b'_1, \ldots, b'_n$ суть рациональные числа и b' отлично от нуля, то B' *отличается от* A *только постоянным (независимым от x) рациональным множителем.* Действительно, мы видели уже, как приведением коэффициентов к одному знаменателю q и вынесением за скобки общего численного множителя d можно представить такой полином, как B', в виде

$$B'=\frac{d}{q}B,$$

причем в полиноме

$$B=bx^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$$

коэффициенты удовлетворяют условиям, установленным относительно коэффициентов полинома A. Делясь без остатка на B′, полином A делится без остатка и на B, но в таком случае, в силу доказанной теоремы,

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} \text{ и } \mathrm{B}' = \frac{d}{q}\mathrm{A},$$

то есть, полином B′ отличается от полинома A только постоянным множителем $\frac{d}{q}$.

Теорема II. *Алгебраическое уравнение* A=0 *наименьшей степени m, удовлетворяющееся при* $x=\mathrm{N}$, **неприводимо,** *т. е. левая его часть неспособна делиться без остатка ни на какой полином*

$$\mathrm{B} = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

где $n < m$ *есть положительное целое число,* $b, b_1, \ldots, b_n$ *суть рациональные числа и* b *отлично от нуля.*

Ибо, допустив, что A делится на B, мы нашли бы, что B отличается от A только постоянным множителем и, следовательно, степень n полинома B не могла бы быть ниже степени m полинома A.

Теорема III. *Если алгебраическое уравнение*

$$\mathrm{A} = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$

удовлетворяющееся при $x=\mathrm{N}$, *неприводимо, и если*

$$\mathrm{B} = bx^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

есть одно из алгебраических уравнений наименьшей степени, удовлетворяющихся при $x=\mathrm{N}$, *причем коэффициенты* b *удовлетворяют условиям теоремы I, то полиномы* A *и* B *тождественно равны.*

Доказательство. Так как каждый из полиномов A и B делится без остатка на $x-\mathrm{N}$, то их общий наибольший делитель D зависит от x. Из самого же процесса нахождения общего наибольшего делителя D вытекает, что D есть полином вида

$$\mathrm{D} = dx^p + d_1x^{p-1} + \cdots + d_p,$$

где p есть положительное целое, $d, d_1, \ldots$ — целые числа *), коих общий наибольший делитель можно принять равным единице *), и d отлично от нуля. Отсюда, согласно теореме I, вытекает, что полиномы B и D тождественны; следовательно, полином A делится без остатка на полином B; но полином A неприводим; следовательно, степень m полинома A равна степени n полинома B. Частное от деления A на B будет поэтому равно $\frac{a}{b}$ и не будет зависеть от x. Частное $\frac{B}{A}$ будет, следовательно, равно $\frac{b}{a}$, то есть полином B делится без остатка на полином A, а так как $B=0$ есть уравнение наименьшей степени, удовлетворяющееся при $x=N$, и B делится без остатка на A, то, по теореме I, полиномы B и A тождественны, что и требовалось доказать.

Теорема IV. *Существует только одно алгебраическое уравнение* **) *наименьшей степени с целыми коэффициентами, коих общий наибольший делитель равен единице, удовлетворяющееся данным алгебраическим числом N. Это уравнение будем называть уравнением, определяющим алгебраическое число N.*

Ибо, если $A=0$ и $B=0$ суть два алгебраических уравнения наименьшей степени с целыми коэффициентами, коих общий наибольший делитель равен единице, удовлетворяющихся числом N, то, по теореме II, уравнение $A=0$ неприводимо, а по теореме III полиномы A и B тождественно равны.

Следствие. Если алгебраическое число N удовлетворяет алгебраическому неприводимому уравнению $A=0$, то уравнение $A=0$ и есть то единственное уравнение, которым определяется алгебраическое число N.

---

*) Если бы некоторые из коэффициентов d не были целыми, то, умножив все коэффициенты на их общего наименьшего знаменателя и разделив полученные после умножения числители на их общего наибольшего делителя, получим общий наибольший делитель полиномов A и B в требуемой форме.

**) Коэффициент высшего члена этого уравнения предполагается положительным.

Определение трансцендентного числа

§ 2. К классу алгебраических чисел относятся:

1) Все рациональные числа, ибо каждое рациональное число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{b}{a}$, которая определяется алгебраическим неприводимым уравнением

$$ax - b = 0.$$

2) Все те иррациональные числа, которые получаются, как результат соединения рациональных чисел при помощи конечного числа рациональных действий ($+$, $-$, $\times$, $:$) и извлечения конечного числа корней с целыми показателями, ибо такие иррациональные числа, как доказывается в высшей алгебре, суть корни неприводимых алгебраических уравнений с целыми коэффицентами.

3) Все те иррациональные числа, которые, служа корнями алгебраических неприводимых уравнений с целыми коэффициентами, не могут быть получены, как результаты соединения рациональных чисел посредством конечного числа рациональных действий и конечного числа извлечений корней с целыми показателями. Существование таких *алгебраических* иррациональных чисел впервые доказано Абелем.

Спрашивается, исчерпывается ли *весь* класс иррациональных чисел двумя классами алгебраических иррациональных чисел, или существуют еще иррациональные неалгебраические числа, т. е. такие, которые не могут удовлетворять никакому неприводимому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.

Намек на существование неалгебраических иррациональных чисел содержится уже у английского геометра James Gregory (1638—1675) в его сочинении Vera circuli et hyperbolae quadratura. Лейбниц назвал такие числа *трансцендентными*.

Итак, *трансцендентным называется всякое число, которое неспособно удовлетворить никакому алгебраическому неприводимому уравнению с целыми коэффициентами.*

Строгое доказательство существования трансцендентных чисел дано впервые Liouville'ем (Comptes rendus, 1844, и журнал Liouville'я 16, 1851). Оно основано на теории непрерывных дробей и представляется довольно сложным *). Замечательное по простоте и гениальное по идее доказательство существования трансцендентных чисел дано было затем германским геометром Georg'ом Cantor'ом в статье Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeller algebraischer Zahlen в журнале Crell'я 77 (1873). К изложению этого доказательства мы теперь и переходим.

Понятие об исчислимом комплексе

§ 3. Комплексом называют совокупность, составленную из ограниченного или неограниченного числа предметов, называемых членами комплекса.

Мы будем рассматривать только такие комплексы, членами которых служат вещественные числа, взятые в неограниченном числе.

Cantor называет *исчислимым комплексом* (abzählbare Menge) такой комплекс, члены которго могут быть перенумерованы, т. е. расположены в один ряд таким образом, чтобы каждый член комплекса занимал в этом ряду совершенно определенное место (указываемое нумером) и чтобы каждое определенное, указанное нумером, место ряда было занято одним только определенным членом комплекса.

Комплекс положительных четных чисел представляет пример исчислимого комплекса, ибо, располагая эти числа в порядке их возрастания,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots,$$

видим, что каждый член (например, $2n$) занимает совершенно определенное (n-ое) место и, наоборот, каждое определенное (n-ое) место занято одним определенным членом ($2n$).

*) См. также: 1) E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898, стр. 26—33. 2) В. Каган. Новое доказательство трансцендентности чисел π и e. „Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики", № 286.

Комплекс натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ n, \ldots \qquad (2)$$

представляет другой пример исчислимого комплекса.

Члены этого комплекса могут быть рассматриваемы, как нумера мест, занимаемых членами любого исчислимого комплекса, и, следовательно, между членами всякого исчислимого комплекса и членами комплекса (2) существует взаимно однозначное соответствие, то есть каждому члену исчислимого комплекса соответствует член комплекса (2) и каждому члену комплекса (2) соответствует один определенный член исчислимого комплекса.

Когда между членами двух комплексов возможно установить взаимно однозначное соответствие, то Cantor говорит, что эти комплексы имеют одинаковую *мощность* (Mächtigkeit). Можно поэтому установить следующее определение:

Исчислимым комплексом называется комплекс, мощность которого равна мощности комплекса натуральных чисел.

С первого взгляда может показаться, что комплекс *всех рациональных* положительных чисел не есть исчислимый комплекс. Действительно, располагая все эти числа в один ряд по порядку их возрастания, находим, что каждому определенному рациональному положительному числу N предшествует бесчисленное множество других рациональных положительных чисел, меньших N, вследствие чего нельзя указать нумера места, занимаемого в этом ряду числом N. Можно, однако же, дать другое расположение членам комплекса рациональных положительных чисел и притом такое, что каждый член этого комплекса будет занимать совершенно определенное место.

Комплекс рациональных положительных чисел есть комплекс всех неравных между собою рациональных положительных несократимых дробей, которых знаменатели в частных случаях могут быть равны единице. Рассмотрим одну такую несократимую дробь $\frac{a}{b}$. Положим

$$H = a + b. \qquad (3)$$

и будем называть целое положительное число H высотою

рассматриваемой несократимой дроби. Каждая несократимая дробь будет иметь определенную высоту H. Наоборот, существует только *ограниченное число* несократимых дробей, имеющих данное целое положительное число H своею высотою.

Для нахождения всех этих дробей достаточно разрешить относительно неизвестных a и b неопределенное уравнение (3) в целых и положительных числах, взять значения a числителями, а соответствующие значения b знаменателями дробей и отбросить все те дроби, которые окажутся сократимыми. А так как уравнение (3) допускает только ограниченное число целых и положительных решений, то число несократимых дробей, имеющих H своею высотой, непременно будет ограниченным. Так, например, в группе дробей

$$\frac{1}{9},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{1}$$

заключаются все те положительные рациональные числа, которых высота равна 10.

Если распределим все положительные рациональные числа в классы по их высотам 1, 2, 3, 4, ..., если затем внутри каждого класса расположим числа в порядке их возрастания и если, наконец, соединим эти классы в один ряд, как это здесь показано:

$$\begin{array}{lll} \text{числа:} & 0, 1, & \left|\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{}\right|\underbrace{\frac{1}{3}, \frac{3}{1}}_{}\left|\underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}_{}\right| \ldots, \\ \text{высоты:} & 1, 2, & \quad 3, \qquad\quad 4, \qquad\qquad\quad 5, \qquad\qquad \ldots, \end{array}$$

то каждое положительное рациональное число будет занимать в этом ряду определенное место, и на каждом месте будет находиться только одно определенное число. Таким образом, комплекс рациональных положительных чисел оказывается исчислимым комплексом.

Комплекс вещественных алгебраических чисел

§ 4. Доказательство существования трансцендентных вещественных чисел основывается у Cantor'а на следующих двух теоремах.

Первая теорема Cantor'а. *Комплекс вещественных алгебраических чисел есть исчислимый комплекс.*

Доказательство. Пусть N будет алгебраическое число, определяемое неприводимым алгебраическим уравнением

$$A = ax^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_nx + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

с целыми коэффициентами, причем $a > 0$. Обозначим через $|a_n|$ численную величину коэффициента a_n. Положим

$$H = m - 1 + a + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots + |a_m| \qquad (4)$$

и будем называть число H высотою алгебраического числа N и определяющего его уравнения A=0. Каждое алгебраическое число имеет, таким образом, определенную высоту H, которая выражается целым положительным числом.

Наоборот, существует только ограниченное число вещественных алгебраических чисел, которых высота равна данному положительному целому числу H. Чтобы найти все алгебраические числа высоты H, составим все те алгебраические неприводимые уравнения, которых высота равна H. Для этой цели достаточно будет сначала разрешить в целых и положительных числах неопределенное уравнение (4), допускающее только конечное число систем целых и положительных значений для $m, a, |a_1|, \ldots, |a_m|$. Имея все системы решений уравнения (4), напишем все те алгебраические уравнения, которых высота равна H, причем коэффициентами при x^n ($n = m-1, m-2, \ldots, 1, 0$) в составляемых уравнениях будут служить различные значения выражения $\pm |a_n|$. Из полученной таким образом системы уравнений исключим все приводимые уравнения, а также и все те уравнения, коэффициенты которых имеют общим наибольшим делителем число, отличное от единицы. Остающаяся после этого система уравнений будет в себе заключать все те и только те неприводимые алгебраические уравнения, которых высота равна H. Система конечного числа вещественных чисел, из коих каждое удовлетворяет одному из этих уравнений, будет содержать все те и только те алгебраические числа, которых высота равна H*).

---

*) Найдем, для примера, все те вещественные алгебраические числа, которых высота равна 4. Полагая в уравнении (4) H = 4 и за-

Если распределим все вещественные алгебраические числа в классы по их высотам 1, 2, 3, 4,...., если затем внутри каждого класса расположим числа в порядке их возрастания и если, наконец, соединим эти классы в один ряд, то каждое вещественное алгебраическое число будет занимать в этом ряду вполне определенное место и на каждом месте будет находиться только одно определенное алгебраическое число. Теорема Cantor'a, таким образом, доказана.

Вторая теорема Cantor'a. *Можно найти бесконечное число вещественных чисел, заключающихся между данными пределами a и $b > a$ и не содержащихся в данном исчислимом комплексе вещественных чисел.*

мечая, что при этом m не может быть больше 5 и что a_m необходимо отлично от 0 (ибо в противном случае соответствующее алгебраическое уравнение степени m, имея корень $x = 0$, будет приводимым), находим, что вопрос приводится к решению в целых и положительных числах каждого из следующих неопределенных уравнений:

$$a + |a_1| = 4 \quad \ldots \quad (m = 1)$$
$$a + |a_1| + |a_2| = 3 \quad \ldots \quad (m = 2)$$
$$a + |a_1| + |a_2| + |a_3| = 2 \quad \ldots \quad (m = 3)$$
$$a + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 1 \quad \ldots \quad (m = 4)$$
$$a + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| = 0 \quad \ldots \quad (m = 5)$$

Последнее уравнение не допускает положительного значения для a и потому должно быть отброшено. Уравнение, соответствующее $m = 4$, уже при $a = 1$ не допускает для $|a_4|$ значения, отличного от 0, и потому также должно быть отброшено. В уравнении, соответствующем $m = 1$, числа a и $|a_1|$ положительны и общий наибольший делитель их равен единице, а потому имеем только следующие две системы решений:

$$a = 1; \ |a_1| = 3,$$
$$a = 3; \ |a_1| = 1,$$

соответственно чему имеем четыре уравнения:

$$x + 3 = 0; \ x - 3 = 0; \ 3x + 1 = 0; \ 3x - 1 = 0.$$

Уравнение, соответствующее $m = 2$, допускает, при a и $|a_1|$ положительных, только следующие системы решений:

$$a = |a_1| = |a_2| = 1$$
$$a = 1, \ a_1 = 0, \ |a_2| = 2 \text{ и } a = 2, \ a_1 = 0, \ |a_2| = 1,$$

соответственно чему имеем 8 уравнений:

$$x^2 + x + 1 = 0; \ x^2 - x + 1 = 0; \ x^2 + x - 1 = 0; \ x^2 - x - 1 = 0;$$
$$x^2 + 2 = 0; \ x^2 - 2 = 0; \ 2x^2 + 1 = 0; \ 2x^2 - 1 = 0.$$

Доказательство. Пусть C будет исчислимый комплекс вещественных чисел. Расположим эти числа в один ряд

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4,\ N_5\ ,\ldots\ldots \qquad (5)$$

так, чтобы каждое занимало в этом ряду вполне определенное место, и обратим каждое число N в бесконечную десятичную дробь. Если какое-либо из чисел N обращается в конечную десятичную дробь—например, $0 \cdot 26$,—то эту десятичную дробь можно будет представить в виде бесконечной десятичной дроби двумя способами: как бесконечную десятичную дробь с периодом 0 и как бесконечную десятичную дробь с периодом 9, то есть

$$0{\cdot}26 = 0{\cdot}260\,00\ldots \text{ и } 0{\cdot}26 = 0{\cdot}259\,99\ldots$$

Мы предположим, что, если в ряду (5) какое-либо из чисел N обращается в конечную десятичную дробь, то число N замещено двумя равными ему бесконечными десятичными дробями. Найдем затем две конечные десятичные дроби, отличающиеся друг от друга только одною единицею какого-либо десятичного порядка и содержащиеся между двумя данными пределами a и $b > a$. Пусть, например, будет

$$a < 0{\cdot}45 < 0{\cdot}46 < b$$

Составим бесконечную десятичную дробь

$$c = 0{\cdot}45c_3c_4c_5\ldots c_n\ldots$$

Первые два уравнения, а также и уравнения $x^2+2=0$, $2x^2+1=0$, как не содержащие вещественных корней, должны быть отброшены. Уравнение, соответствующее $m=3$, допускает, при a и $|a_3|$ положительных, только одну систему решений

$$a = |a_3| = 1;\ |a_1| = |a_2| = 0,$$

соответственно чему имеем 2 уравнения

$$x^3 \pm 1 = 0.$$

Оба эти уравнения, как приводимые, должны быть отброшены. Таким образом, находим, что неприводимыми алгебраическими уравнениями высоты 4, удовлетворяющимися вещественными значениями x, будут только следующие уравнения:

$$x \pm 3 = 0;\ 3x+1=0;\ x^2 \pm x - 1 = 0;\ x^2 - 2 = 0;\ 2x^2 - 1 = 0,$$

Вещественными алгебраическими числами, которых высота равна 4, будут следующие 12 чисел:

$$\pm 3;\ \pm\frac{1}{3};\ \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2};\ \pm\sqrt{2};\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

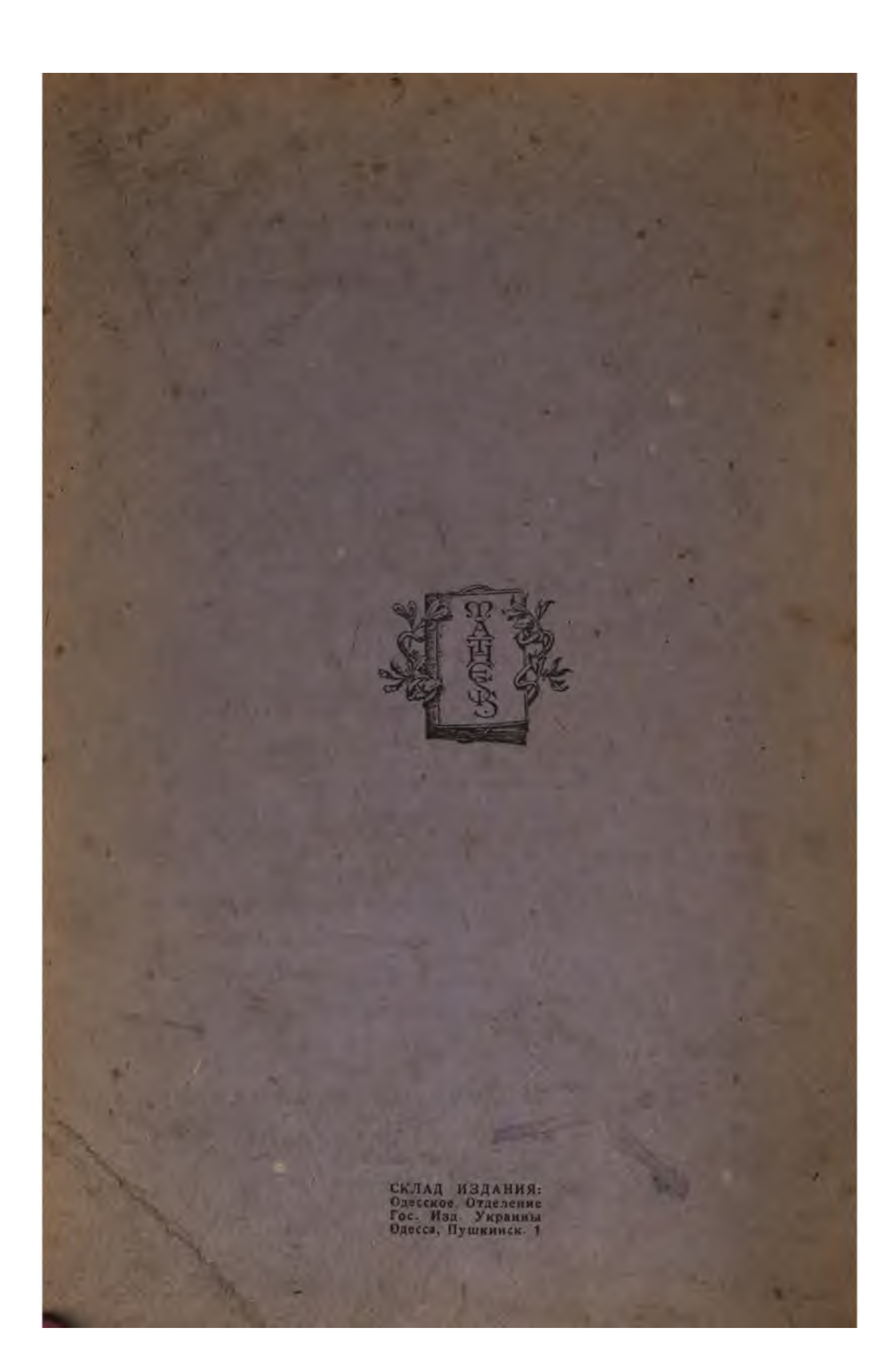
где $c_3, c_4, \ldots, c_n$ суть последовательные цифры числа c, начиная с третьего десятичного порядка. Каковы бы ни были цифры $c_3, c_4, \ldots, c_n, \ldots$, дробь c будет содержаться в интервале 0·45 и 0·46, а следовательно, между a и b. Возьмем теперь c_3 отличным от третьей цифры десятичного порядка числа N_1, или отличным от третьих цифр двух бесконечных периодических дробей, заменяющих в ряду (5) место числа N_1. Точно также возьмем c_4 отличным от четвертой цифры числа N_2 или от четвертых цифр двух дробей, заменяющих в ряду (5) число N_2 и т. д., вообще, цифру c_n возьмем отличною от n-ой цифры числа N_{n-2} или от n-ых цифр двух бесконечных десятичных дробей, замещающих число N_{n-2} в ряду (5). Если затем подчиним выбор цифр $c_3, c_4, \ldots$ какому-либо определенному дополнительному правилу, которое позволяло бы выбирать каждую цифру одним только способом, то для числа c получим определенную бесконечную десятичную дробь, содержащуюся между пределами a и b и не входящую в состав комплекса C. Действительно, допуская противное, мы нашли бы, что c занимает определенное n-ое место в ряду (5), что невозможно, так как $(n+2)$-ой десятичный знак числа c отличается от соответствующего $(n+2)$-ого знака числа N_n, или от $(n+2)$-ых цифр двух бесконечных десятичных дробей, равных N_n.

Таких чисел, как c, можно составить сколько угодно, варьируя дополнительное правило выбора цифр $c_3, c_4, \ldots$, что и требовалось доказать.

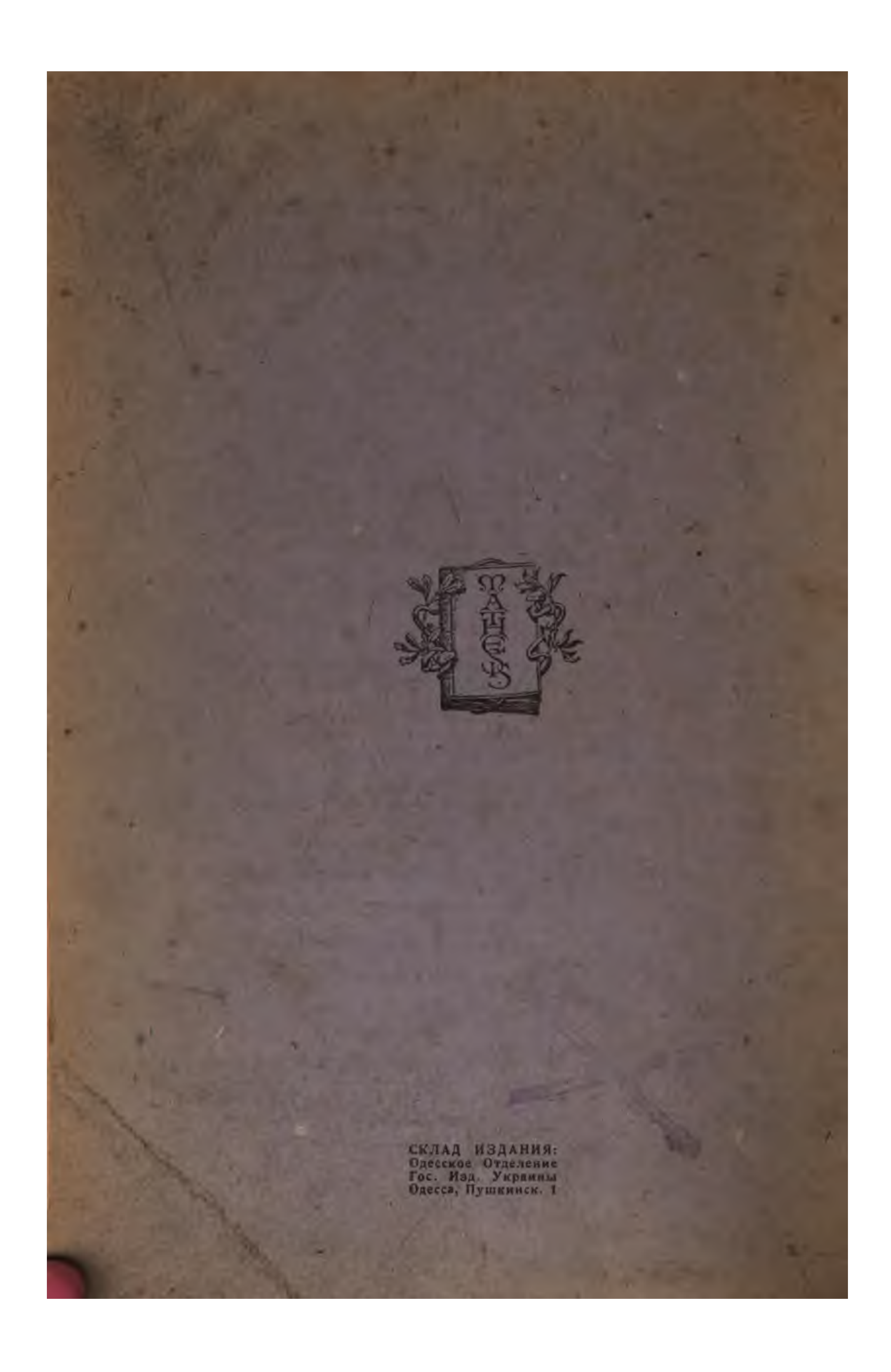
Как непосредственное следствие из приведенных двух теорем Cantor'а вытекает

Третья теорема Cantor'а. *Существует неограниченное число вещественных трансцендентных чисел, содержащихся между двумя данными вещественными пределами* a и $b > a$.

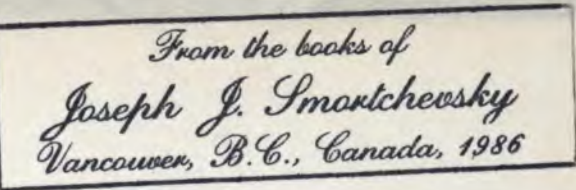
Ибо, по первой теореме Cantor'а, комплекс вещественных алгебраических чисел есть исчислимый комплекс C, а по второй теореме можно написать сколько угодно вещественных чисел, не содержащихся в этом комплексе и заключающихся между пределами a и b.

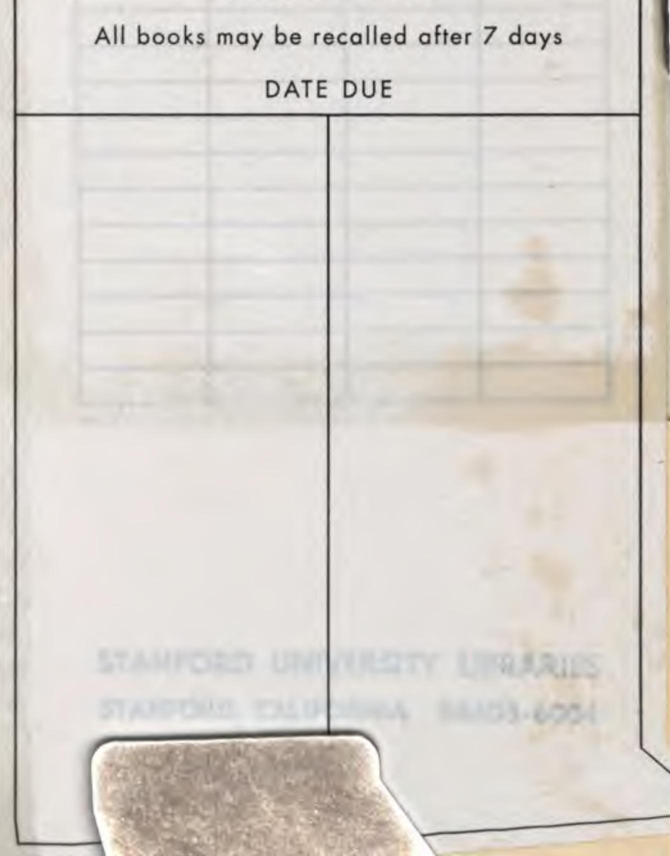


СКЛАД ИЗДАНИЯ:
Одесское Отделение
Гос. Изд. Украины
Одесса, Пушкинск. 1



СКЛАД ИЗДАНИЯ:
Одесское Отделение
Гос. Изд. Украины
Одесса, Пушкинск. 1


From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986


STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
CECIL H. GREEN LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-1493
All books may be recalled after 7 days
DATE DUE
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

